MATEMATIČKA BIBLIOTEKA

Boris Apsen



Repetitorij više matematike





3

GOLDEN MARKETING • TEHNIČKA KNJIGA

PROF. DR ING. BORIS APSEN

REPETITORIJ
VIŠE
MATEMATIKE

III DIO

Treće izdanje

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB 1965.

SADRŽAJ

§ 1. DETERMINANTE

1. Općenito

Determinante su brojčani izrazi, koji su građeni prema određenim pravilima, te predstavljaju pojednostavljeni način pisanja stanovitih matematičkih izraza.

Jedna od primjena determinanata je rješavanje linearnih algebarskih jednadžbi. Rješavajući sustav od dvije linearne algebarske jednadžbe s dvije nepoznanice dolazimo do determinanata drugog reda, koje imaju dva retka i dva stupca; sustav od tri linearne algebarske jednadžbe s tri nepoznanice vodi do determinanata trećeg reda, koje imaju tri retka i tri stupca, i t. d.

Promotrimo posebno pojedine vrste determinanata.

2. Determinante drugog reda

O tim determinantama već smo govorili navodeći metode rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi s dvije nepoznanice (vidi Repet. element. matematike, I, § 11). Ponovimo ukratko već rečeno, pri čemu koeficijente nepoznanica označimo slovom a, kojemu dodijelimo dva indeksa: prvi indeks označuje redni broj retka, u kojem se nalazi dotični član jednadžbe, a drugi indeks označuje redni broj njegova stupca. Prema tome, sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice x i y glasi:

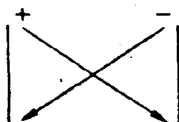
$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Riješivši taj sustav po bilo kojoj metodi, na pr. načinom jednakih koeficijenata, dobijemo za nepoznanice slijedeće izraze:

$$x = \frac{b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}\,; \qquad y = \frac{a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Izraz, u nazivnicima $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ možemo simbolički prikazati u obliku determinante drugog reda:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$



do koje dolazimo tako, da jednostavno prepišemo koeficijente nepoznanica onim redom kako dolaze u jednadžbama zadanog sustava. Ta determinanta zove se determinanta zadanog sustava jednadžbi, a čitamo li gornju jednakost s desna na lijevo, vidimo i način rješavanja te determinante: determinanta drugog reda računa se tako, da se množe u križ članovi, ili, kako se obično kaže, elementi determinante, pri čemu se drugi umnožak dodaje prvom s protivnim predznakom, kako se to vidi iz sheme, a također i iz gornje jednakosti.

I oba brojnika u izrazima za x i y možemo prikazati u obliku determinanata, koje dobijemo iz determinante sustava

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

tako, da za brojnik nepoznanice x zamijenimo stupac njegovih koeficijenata a_{11} i a_{21} članovima b_1 i b_2, koji se nalaze na desnim stranama zadanih jednadžbi, a za brojnik nepoznanice y zamijenimo u determinanti drugi stupac, koji čine koeficijenti te nepoznanice, istim članovima b_1 i b_2. Dobijemo:

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Kako se vidi iz tih jednakosti, determinante, koje su u brojnicima, rješavaju se po istoj gore navedenoj shemi, t. j. množenjem u križ.

Promotrimo pojedine slučajeve, koji mogu nastati pri rješavanju sustava od dvije linearne algebarske jednadžbe. Promatranje tih slučajeva popratit ćemo njihovim geometrijskim tumačenjem, jer svaka linearna jednadžba predočuje geometrijski pravac u ravnini XY, pa se rješavanje sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice svodi geometrijski na određivanje koordinata presjecišta tih pravaca.

Primijetimo, da gore napisane jednadžbe za $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$ čine tako zvani nehomogeni sustav, a kad je $b_1 = 0$ i $b_2 = 0$ homogeni sustav jednadžbi. Promotrimo posebno ta dva sustava.

I. Nehomogeni sustav

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

a) Neka su determinanta sustava Δ i obje determinante brojnika različite od nule.

U tom slučaju ima sustav jedno rješenje $x = x_0$, $y = y_0$.

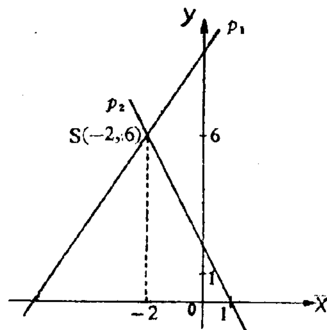
Geometrijski to znači, da se pravci sijeku u točki $S(x_0, y_0)$.

Na pr.

$$p_1 \equiv 9x - 6y + 54 = 0$$
$$p_2 \equiv 2x + y - 2 = 0$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -54 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-54 + 12}{9 + 12} = \frac{-42}{21} = -2$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -54 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{18 + 108}{9 + 12} = \frac{126}{21} = 6$$



Sl. 1

Presjecište $S(-2, 6)$. Vidi sl. 1.

b) Neka je determinanta sustava $\Delta = 0$, dok su determinante brojnikâ različite od nule, t. j.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Odatle

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

t. j. koeficijenti od x i y su razmjerni (proporcionalni).

U tom slučaju dobijemo:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{0} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{0}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{0} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{0}$$

Kako dijeljenje s nulom nema smisla, sustav jednadžbi nema rješenja.

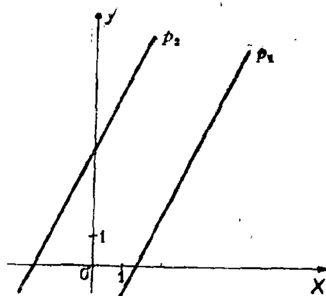
Razmjernost koeficijenata od x i y znači geometrijski, da su pravci usporedni, pa se ne sijeku, ili, kako se često kaže, sijeku se u beskonačnosti, jer je

$$\lim_{\Delta \to 0} x = \lim_{\Delta \to 0} \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{\Delta} = \infty$$

i analogno

$$\lim_{\Delta \to 0} y = \infty,$$

kad su brojnici različiti od nule.



Sl. 2

Na pr.

$$p_1 \equiv 2x - y - 3 = 0$$
$$p_2 \equiv 4x - 2y + 8 = 0$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-6-8}{-4+4} = \frac{-14}{0};$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{0} = \frac{-16-12}{0} = \frac{-28}{0}$$

Vidi sl. 2.

c) Neka je determinanta sustava Δ, a također obje determinante brojnikâ jednake nuli, t. j.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0; \quad b_1a_{22} - a_{12}b_2 = 0; \quad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = 0$$

ili

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{b_2}{a_{22}}; \quad \frac{a_{11}}{b_1} = \frac{a_{21}}{b_2}$$

ili

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}; \quad \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{b_1}{b_2}$$

a odatle je:

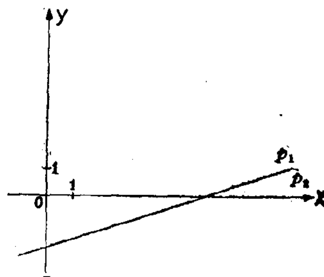
$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

Svi koeficijenti zadanih jednadžbi su razmjerni, t. j. jedna je jednadžba dobivena iz druge tako, da je pomnožena nekom konstantom, drugim riječima, nemamo dvije jednadžbe, već samo jednu, ili, kako se kaže, imamo dvije linearno zavisne jednadžbe; geometrijski to znači, da nam je zadan samo *jedan* pravac.

U tom je slučaju:

$$x_0 = \frac{0}{0}; \quad y_0 = \frac{0}{0}$$

Kako $\frac{0}{0}$ nema određenog smisla, mogli bismo zaključiti da zadani sustav jednadžbi nema rješenja. Međutim, smatramo li da obje linearno zavisne jednadžbe sustava predočuju dva pravca, koji se podudaraju u svim točkama, tada možemo svaku točku pravca smatrati sjecištem pravaca, pa kazati, da naš sustav ima beskonačno mnogo rješenja.



Sl. 3

Na pr.:

$$p_1 \equiv x - 3y - 6 = 0 / \cdot -2$$
$$p_2 \equiv -2x + 6y + 12 = 0$$

Vidi sl. 3.

Prihvatimo li to prošireno shvaćanje linearno zavisnih jednadžbi, možemo kazati, da **nehomogeni sustav ima ili samo jedan sustav rješenja, ili uopće nema rješenja, ili ih ima beskonačno mnogo.**

II. Homogeni sustav

$$a_{11}x + a_{12}y = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}y = 0$$

a) Neka je determinanta sustava $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

U tom je slučaju:

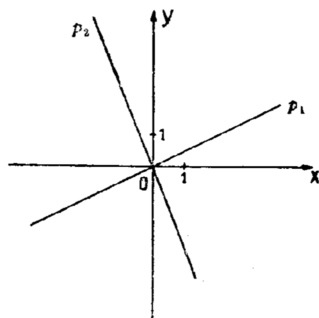
$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{0}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = 0$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{0}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = 0$$

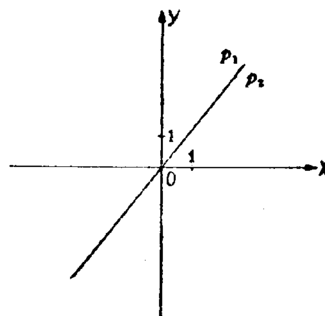
Ta su rješenja $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$ trivijalna ili očevidna, jer se na prvi pogled vidi, da vrijednosti $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$ zadovoljavaju zadani sustav.

Geometrijski to znači, da se oba pravca sijeku u ishodištu.

Na pr. $\quad p_1 \equiv x - 2y = 0$
$\quad p_2 \equiv 7x + 3y = 0$ Vidi sl. 4.



Sl. 4



Sl. 5

b) Determinanta sustava $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$

To znači, da su koeficijenti od x i y razmjerni, jer iz gornje jednakosti, kako smo to malo prije vidjeli, slijedi da je $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$ Drugim riječima, zadane su jednadžbe linearno zavisne: jedna je dobivena iz druge množenjem s nekom konstantom.

U tom je slučaju $x_0 = \frac{0}{0}$ i $y_0 = \frac{0}{0}$, pa bismo opet mogli zaključiti, da sustav nema rješenja. Međutim, smatramo li da obje jednadžbe sustava predočuju **dva identična pravca**, možemo svaku točku tog dvostrukog pravca smatrati sjecištem pravaca, pa kazati, da homogeni sustav ima beskonačno mnogo rješenja, ako je determinanta sustava jednaka nuli

Na pr.

$$p_1 \equiv 4x - 5y = 0 \quad | : -4$$

$$p_2 \equiv -x + \frac{5}{4}y = 0$$

Vidi sl. 5.

Na taj smo način došli do važnog zaključka:

Homogeni sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice ima rješenja različita od očevidnih samo u tom slučaju, kad je determinanta sustava jednaka nuli, i tada ih ima beskonačno mnogo.

3. Determinante trećeg reda

Rješavajući sustav od dvije linearne algebarske jednadžbe s dvije nepoznanice, dolazimo do determinanata drugog reda. Slično tome vodi nas rješavanje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice do determinanata trećeg reda, koje imaju tri retka i tri stupca. Slično determinantama drugog reda označujemo i članove determinanata trećeg reda indeksima, od kojih prvi indeks znači redni broj retka, a drugi — redni broj stupca. I sustav od 3 linearne jednadžbe s tri nepoznanice može biti homogen ili nehomogen već prema tome, da li je desna strana sustava (t. j. članovi b_1, b_2 i b_3) jednaka ili različita od nule.

I. Nehomogeni sustav

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

(Obrati pažnju, da se **prvi** indeksi od a ne mijenjaju, ako ideš po bilo kojem retku, ali rastu od 1 do 3 kad ideš po stupcu. Obratno se vladaju **drugi** indeksi).

Riješimo li na bilo koji način taj sustav jednadžbi, dobit ćemo za nepoznanice izraze, koje možemo prikazati u obliku determinanata trećeg reda. Kao i u rješenjima sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, imat će sva tri izraza za x, y i z jednake nazivnike, koje možemo simbolički prikazati u obliku determinante trećeg reda. To je determinanta Δ zadanog sustava jednadžbi.

Do te determinante dolazimo na isti način, kao i do determinante sustava drugog reda: jednostavno prepišimo sve koeficijente nepoznanica i to onim redom, kako su navedeni u jednadžbama. Dobijemo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

I brojnike u izrazima za nepoznanice x, y i z možemo napisati u obliku determinanata. U tu svrhu postupamo na isti način, kao i pri rješavanju sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice.

Da dobijemo brojnik izraza za x, zamijenimo prvi stupac determinante sustava Δ, t. j. koeficijente od x, desnim stranama jednadžbe, t. j. s b_1, b_2 i b_3:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \text{(a)}$$

Na isti način dobijemo u obliku determinanata izraze za y i z: u brojniku za y zamijenimo u determinanti sustava Δ drugi stupac, t. j. koeficijente od y, desnim stranama b_1, b_2 i b_3, a u brojniku za z zamijenimo u determinanti Δ treći stupac, t. j. koeficijente od z, s b_1, b_2 i b_3. Dobijemo:

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad \text{(b)} \qquad z_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad \text{(c)}$$

Nastaje pitanje, kako ćemo izračunati vrijednosti nepoznanica x_0, y_0 i z_0, ako rješenja zadanog sustava jednadžbi neposredno napišemo u gore navedenim oblicima (a), (b) i (c), t. j. u obliku determinanata.

Najprije navedimo shemu predznaka:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Shema predznaka

Ta se shema lako pamti, jer idemo li po retku, ili po stupcu, uvijek dolaze naizmjence + i —. Prema toj shemi uzimamo predznake pojedinih elemenata, kad razvijemo determinantu.

Svaku determinantu možemo razviti na više načina: po elementima bilo kojeg retka ili po elementima bilo kojeg stupca. Postupak je uvijek isti.

Hoćemo li da determinantu razvijemo na pr. po elementima prvog retka, a to je najčešći slučaj razvijanja determinanata, tada prepisavši prvi element toga retka, precrtamo prvi redak i prvi stupac determinante, pa prepisani prvi element množimo s preostalim dijelom determinante. To je determinanta drugog reda, koja se zove subdeterminanta ili minor.

Iza toga prepišemo s protivnim predznakom (vidi shemu predznaka) drugi element prvoga retka, pa slično kao i prije množimo taj element sa subdeterminantom drugog reda, koju dobijemo, kad precrtamo prvi redak i drugi stupac za-

dane determinante. Konačno, prepišemo treći element prvog retka i množimo ga sa subdeterminantom, koja se dobiva, kad se precrta prvi redak i treći stupac u zadanoj determinanti. Sada razvijemo subdeterminante na način, koji nam je već poznat. Na slični način razvijemo determinantu po elementima drugog ili trećeg retka, odnosno po elementima bilo kojeg stupca, samo moramo paziti, da kod tvorenja subdeterminanata precrtamo uvijek onaj redak i stupac, u kojem se nalazi element, koji se množi s dotičnom subdeterminantom. Pokažimo taj razvoj na determinanti sustava Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a_{11}- & -a_{12}- & -a_{13}- \\ | & \| & \| \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ | & \| & \| \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Razvoj po elementima prvog retka:

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Vidimo, da se determinante trećeg reda razviju u tri subdeterminante drugog reda.

Na slični način razvijemo bilo koju determinantu trećeg reda po elementima drugog i trećeg retka i po elementima prvog, drugog i trećeg stupca.

Razvijmo na pr. determinantu Δ po elementima drugog stupca:

$$\Delta = \begin{vmatrix} & | & \\ a_{11}- & a_{12} & -a_{13} \\ & | & \\ a_{21}= & a_{22} & =a_{23} \\ & | & \\ a_{31}\equiv & a_{32} & \equiv a_{33} \\ & | & \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) =$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21}$$

Usporedimo li obje vrijednosti dobivene za determinantu sustava Δ, vidjet ćemo da su te vrijednosti identične.

Primjer

Riješi zadani sustav jednadžbi, pri čemu sve determinante razvij na različite načine.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 \\ 4x + y - 7z &= -8 \\ x - 8y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -8 & 1 & -7 \\ 0 & -8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix}}$$

Determinantu, koja je u brojniku, razvijemo po elementima prvog retka, a onu u nazivniku — po elementima prvog stupca:

$$x_0 = \frac{5\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} -(-3)\begin{vmatrix} -8 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} -4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{5(4-56)+3(-32+0)+1(64-0)}{2(4-56)-4(-12+8)+1(21-1)} = \frac{-292}{-68} = \underline{\frac{73}{17}}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & -8 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix}}$$

Prvu determinantu razvijemo po elementima drugog retka, a drugu, t. j. determinantu sustava, po elementima drugog stupca:

$$y_0 = \frac{-4\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} -8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} -(-7)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(-3)\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} -(-8)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-4(20-0)-8(8-1)+7(0-5)}{3(16+7)+1(8-1)+8(-14-4)} = \frac{-171}{-68} = \underline{\frac{171}{68}}$$

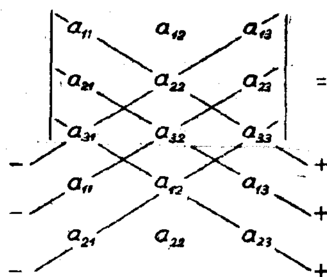
$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -8 \\ 1 & -8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix}}$$

Prvu determinantu razvijemo po elementima trećeg retka, a drugu po elementima treceg stupca:

$$\frac{1\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} -(-8)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} +0}{1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} -(-7)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(24-5)+8(-16-20)}{(-32-1)+7(-16+3)+4(2+12)} = \frac{-269}{-68} = \underline{\frac{269}{68}}$$

Spomenimo još, da svaku determinantu možemo razviti i po **Sarrusovu** pravilu. Napisavši determinantu Δ, ponovimo ispod nje njena prva dva retka, a zatim uzimamo tri produkta po dijagonalama s lijeva na desno i tri produkta s protivnim predznakom po dijagonalama s desna na lijevo:



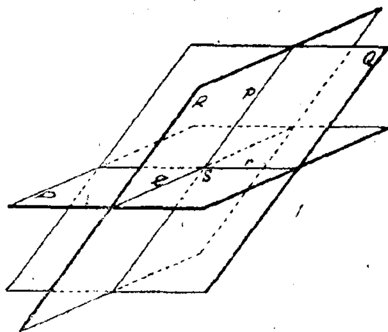
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Možemo postupati i tako, da napišemo na desno od determinante njena dva prva stupca, a dalje računamo produkte kao u prvom slučaju uz istu shemu predznaka.

Načini to!

Riješi gore navedeni sustav jednadžbi računajući determinante po Sarrusovu pravilu.

Promotrimo sada pojedine slučajeve, koji mogu nastati pri rješavanju nehomogenog sustava od tri linearne algebarske jednadžbe s tri nepoznanice.



Sl. 6

a) Neka je determinanta sustava Δ i sve tri determinante brojnika različite od nule.

U tom slučaju ima sustav jednadžbi samo jedan sustav rješenja $x = x_0$, $y = y_0$ i $z = z_0$. Kako ćemo kasnije vidjeti (vidi § 3, 4 — 6), svaka jednadžba sustava predočuje geometrijski ravninu u prostoru, pa riješiti sustav od tri linearne algebarske jednadžbe znači geometrijski odrediti onu točku S, u kojoj se sijeku sve tri ravnine, t. j. točku, koja pripada svima trima ravninama, a sjecište je njihovih međusobnih presječnica (pravaca). U našem slučaju sve se tri ravnine P, Q i R sijeku u jednoj točki $S(x_0, y_0, z_0)$. (Vidi sl. 6).

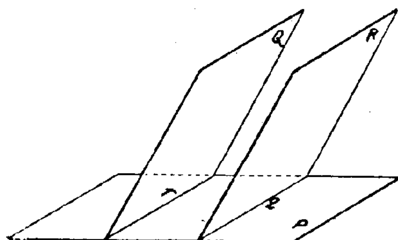
Tako se na pr. sijeku u ishodištu O sve tri koordinatne ravnine prostornog pravokutnog koordinatnog sustava (vidi dalje sl. 22). Pređašnji primjer, u kojem smo riješili sustav od tri jednadžbe, ilustrira baš naš slučaj a), jer su u tom primjeru sve determinante različite od nule, pa se tri zadane ravnine, koje su geometrijska predodžba zadanih jednadžbi sustava, sijeku u točki $S\left(\frac{73}{17}, \frac{171}{68}, \frac{269}{68}\right)$.

b) Neka je determinanta sustava Δ jednaka nuli, dok su determinante brojnika različite od nule.

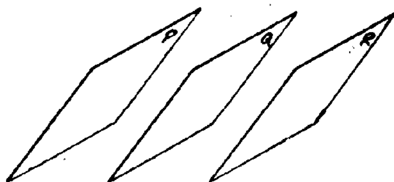
U tom slučaju imaju izrazi (a), (b) i (c) za nepoznanice x_0, y_0 i z_0 nule u nazivnicima, dok su njihovi brojnici različiti od nule.

Kako dijeljenje s nulom nema smisla, zaključujemo, da zadani sustav jednadžbi nema rješenja.

Geometrijski to znači, da se presječnice ravnina ne sijeku u jednoj točki, kao u slučaju a), već da su dvije ili sve tri ravnine međusobno paralelne. (Vidi sl. 7 i 8).



Sl. 7



Sl. 8

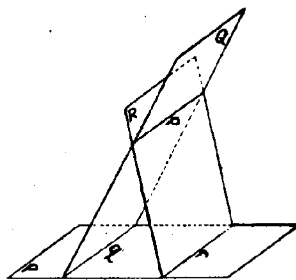
U prvom su slučaju koeficijenti od x, y i z u dvima jednadžbama sustava jednaki ili razmjerni, dok u drugom slučaju ti su koeficijenti jednaki ili razmjerni u svima trima jednadžbama. (Vidi dalje § 3, 5, c).

Riješi na pr. sustave jednadžbi:

$$\begin{aligned} 1.\quad 2x - 3y + 5z &= 3 \\ 4x - 6y + 10z &= 7 \\ x + y + z &= -2 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 2.\quad 2x - 3y + 5z &= 3 \\ 4x - 6y + 10z &= 7 \\ 6x - 9y + 15z &= -2 \end{aligned}$$



Sl. 9

Može biti još jedan slučaj, kad sustav jednadžbi nema rješenja, iako koeficijenti od x, y i z nisu proporcionalni. Do tog slučaja dolazimo, ako je lijeva strana jedne jednadžbe sustava zbroj ili razlika lijevih strana ostalih dviju jednadžbi. U tom slučaju ravnine, koje predočuju zadane jednadžbe sustava, sijeku se međusobno u tri paralelna pravca p, q i r (vidi sl. 9)

Riješi na pr. sustav, u kojem je lijeva strana treće jednadžbe zbroj lijevih strana prvih dviju:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 6 \\ x + y + z &= 2 \\ 3x - 2y + 6z &= 7 \end{aligned}$$

Dobit ćeš: $\quad x_0 = \frac{8}{0}$; $\quad y_0 = \frac{-3}{0}$; $\quad z_0 = \frac{-5}{0}$

Kasnije u primjeru (vidi dalje § 3,6) dokazat ćemo, da su presječnice tih ravnina međusobno paralelni pravci p, q i r

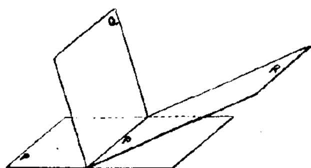
c) Neka je determinanta sustava Δ i sve tri determinante brojnikâ jednake nuli.

U tom slučaju dobijemo prema (a), (b) i (c) slijedeće vrijednosti za rješenja x_0, y_0 i z_0 zadanih jednadžbi

$$x_0 = \frac{0}{0}, \quad y_0 = \frac{0}{0}, \quad z_0 = \frac{0}{0}$$

Kako kvocijent $\frac{0}{0}$ nema određenog smisla, mogli bismo zaključiti, da sustav jednadžbi nema rješenja. U tom su slučaju c) proporcionalni ne samo koeficijenti od x, y i z, već i desne strane jednadžbi, t. j. sve tri jednadžbe su međusobno zavisne, jer su druga i treća jednadžba dobivene iz prve tako, da je ta prva jednadžba pomnožena s nekim konstantama. Podijelimo li drugu i treću jednadžbu tim konstantama, dobit ćemo prvu jednadžbu. To znači, da nam je zapravo zadana samo jedna jednadžba ili geometrijski samo jedna ravnina. Smatramo li, da tri zadane linearno zavisne jednadžbe predočuju tri ravnine, koje se podudaraju u svim točkama, tada možemo svaku točku te ravnine smatrati kao sjecište triju ravnina, a to znači, da zadani sustav jednadžbi ima beskonačno mnogo rješenja.

Postoji još jedna mogućnost linearne zavisnosti zadanih jednadžbi. Pretpostavimo, da je jedna od triju zadanih jednadžbi sustava zbroj ili razlika ostalih dviju, koje su linearno nezavisne.



Sl. 10

Na pr.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 6 \\ x + y + z &= 2 \\ 3x - 2y + 6z &= 8 \end{aligned} \Big| +$$

Riješimo li taj sustav jednadžbi, dobit ćemo opet:

$$x_0 = \frac{0}{0}, \quad y_0 = \frac{0}{0} \quad \text{i} \quad z_0 = \frac{0}{0}.$$

Kako ćemo kasnije u § 3, 6. primjer 2. vidjeti, tri ravnine P, Q i R, koje su geometrijska predodžba zadanih jednadžbi sustava, sijeku se u tom slučaju u jednom pravcu p, imaju dakle beskonačno mnogo zajedničkih točaka, pa možemo opet kazati, da sustav jednadžbi ima beskonačno mnogo rješenja. (Sl. 10).

Iz navedenog vidimo, da n e h o m o g e n i s u s t a v o d t r i j e d n a d ž b e s t r i n e p o z n a n i c e, k a o i n e h o m o g e n i s u s t a v o d d v i j e j e d n a d ž b e s d v i j e n e p o z n a n i c e, i m a i l i s a m o j e d a n s u s t a v r j e š e n j a, i l i u o p ć e n e m a r j e š e n j a, i l i i h i m a b e s k o n a č n o m n o g o.

II. Homogeni sustav

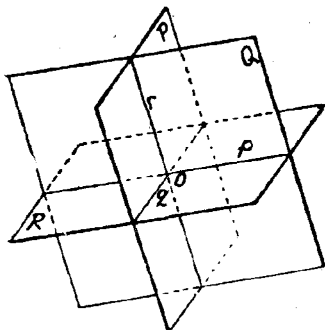
$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$

a) Neka je determinanta sustava $\Delta \neq 0$.

U tom je slučaju

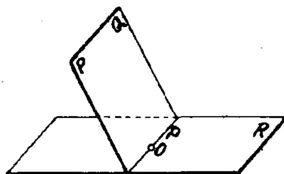
$$x_0 = \frac{0}{\Delta} = 0, \quad y_0 = \frac{0}{\Delta} = 0 \quad \text{i} \quad z_0 = \frac{0}{\Delta} = 0,$$

jer će u izrazima (a), (b) i (c) za x_0, y_0 i z_0 svaki brojnik sadržavati po jedan stupac, koji se sastoji samo od nula, pa razvijemo li svaku determinantu brojnika po elementima toga nulstupca, dobit ćemo nulu, dok su nazivnici Δ različiti od nule.



To je očevidno rješenje, jer pada u oči, da vrijednosti $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ i $z_0 = 0$ zadovoljavaju sve jednadžbe homogenog sustava.

Sl. 11



Sl. 12

Geometrijski to znači, da se tri zadane ravnine P, Q i R sijeku u ishodištu O koordinatnog sustava (sl. 11).

b) Neka je determinanta sustava $\Delta = 0$

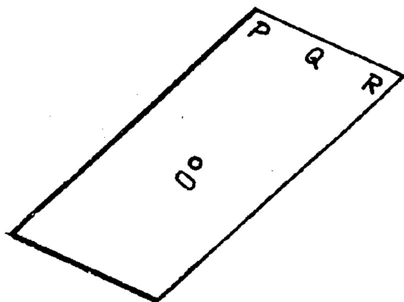
U tom je slučaju

$$x_0 = \frac{0}{0}; \qquad y_0 = \frac{0}{0}; \qquad z_0 = \frac{0}{0},$$

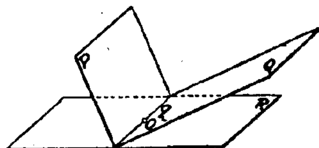
a ti kvocijenti, kako znamo, nemaju određenog smisla.

Ako je determinanta sustava $\Delta = 0$, koeficijenti dviju ili svih triju jednadžbi su razmjerni, a to znači geometrijski, da se dvije ili sve tri ravnine podudaraju u svim svojim točkama, pri čemu u prvom slučaju identične ravnine P i Q sijeku treću ravninu R u pravcu p, koji prolazi ishodištem (sl. 12), a u drugom slučaju trostruka ravnina P, Q i R prolazi ishodištem (sl. 13).

Konačno, determinanta sustava Δ jednaka je nuli, kad je jedna od triju jednadžbi sustava zbroj ili razlika dviju ostalih. Geometrijski to znači, da se sve tri ravnine sijeku u jednom pravcu q, koji prolazi ishodištem (sl. 14). Sličan slučaj imali smo prije, kad je lijeva strana jedne jednadžbe nehomogenog sustava bila zbroj ili razlika lijevih strana drugih dviju jednadžbi (vidi sl. 9), ali tada sustav jednadžbi nema rješenja. Budući da sada sve tri ravnine prolaze ishodištem O, paralelni pravci p, q i r poklapaju se. U svim tim slučajevima imaju sve tri ravnine beskonačno mnogo zajedničkih točaka, pa možemo kazati, da homogeni sustav ima uz $\Delta = 0$ beskonačno mnogo rješenja.



Sl. 13



Sl. 14

Na taj način došli smo do istog važnog zaključka do kojeg smo došli već prije govoreći o homogenom sustavu od 2 jednadžbe s 2 nepoznanice.

Homogeni sustav od tri linearne algebarske jednadžbe s **tri** nepoznanice ima rješenja različita od očevidnih samo u tom slučaju, kad je determinanta sustava $\Delta = 0$, i tada ih ima **beskonačno** mnogo.

Primijetimo još, da zavisnost jednadžbi zadanog homogenog sustava možemo lako prepoznati po tome, što je determinanta sustava jednaka nuli, dok za nehomogeni sustav $\Delta = 0$ znači linearnu zavisnost lijevih strana jednadžbi.

4. Determinante viših redova

Determinante četvrtog, petog ili općenito n-tog reda, t. j. determinante, koje imaju četiri, pet, odnosno n redaka i stupaca, rješavaju se na isti način, kao i determinante trećeg reda, t. j. te determinante možemo razviti po elementima bilo kojeg retka i po elementima bilo kojeg stupca. Slična je i shema predznaka. Na pr. za determinante četvrtog reda ta shema glasi:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Razvijmo na pr. determinantu četvrtog reda $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 7 & -2 \end{vmatrix}$ po elementima prvog retka.

Dobit ćemo:

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 10 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 10 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 5[1(0 + 21) + 1(-20 - 3) + 4(70 + 0)] + 3[1(0 + 21) + 1(-4 + 3) +$$

$$+ 4(14 - 0)] + 2[1(-20 - 3) - 1(-4 + 3) + 4(-2 - 10)] - 1[1(70 + 0) -$$

$$- 1(14 - 0) - 1(-2 - 10)] = 1390 + 228 - 140 - 68 = \underline{1410.}$$

Vidimo, da se determinanta četvrtog reda razvije u četiri subdeterminante ili četiri minora trećeg reda.

Riješi za vježbu pomoću determinanata sustav od četiri linearne algebarske jednadžbe s četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 2z + u &= 7 \\ x + y - z + 4u &= -5 \\ 2x + 10y - 3u &= 8 \\ x - y + 7z - 2u &= \text{[illegible]} \end{aligned}$$

Rezultate kontroliraj uvrštenjem u zadane jednadžbe vrijednosti dobivene za nepoznanice, pa ćeš istovremeno opaziti, da je rješavanje sustava od 4 i više linearnih jednadžbi načinom determinanata glomazan posao i da druge metode, na pr. metoda jednakih koeficijenata, brže vodi cilju.

Radi toga se metodom determinanata rješavaju sustavi od najviše četiri linearne jednadžbe Praktička prednost determinanata leži u drugome, a to ćemo uskoro vidjeti.

Sve što smo rekli o rješavanju sustava od tri linearne algebarske jednadžbe s tri nepoznanice, vrijedi i za sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica.

Nehomogeni sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica ima za bilo koje desne strane tih jednadžbi samo jedan sustav rješenja $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ako je determinanta sustava različita od nule. Za $\Delta = 0$ taj sustav nema rješenja, ako su determinante u brojnicima izraza za nepoznanice različite od nule, odnosno ima beskonačno mnogo rješenja, ako su te determinante jednake nuli.

Homogeni sustav od n linearnih algebarskih jednadžbi s n nepoznanica ima rješenja različita od očevidnih ($x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots,$ $x_n = 0$) samo u tom slučaju, kad je determinanta sustava $\Delta = 0$, i tada ih ima beskonačno mnogo.

Daljnje primjene računanja determinantama nalazimo u analitičkoj geometriji, kao što pokazuju slijedeći primjeri:

1. Napiši jednadžbu pravca, koji prolazi dvjema zadanim točkama $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$

Znamo opću jednadžbu pravca

$$Ax + By + C = 0$$

Pravac prolazi točkom $T_1(x_1, y_1)$, dakle

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

također točkom $T_2(x_2, y_2)$, dakle

$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$

Dobili smo homogeni sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice A, B i C. Da taj sustav ima rješenja različita od očevidnih, nužno je i dovoljno da je determinanta sustava $\Delta = 0$

Dobijemo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a to je tražena jednadžba pravca kroz dvije zadane točke. Da se u to uvjerimo, oduzmimo od elemenata drugog retka elemente prvog retka, a od elemenata trećeg retka elemente drugog retka. Kako ćemo kasnije vidjeti (vidi dalje svojstvo 7), time se vrijednost determinante ne mijenja.

Dobijemo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Sada razvijemo tako uređenu determinantu po elementima trećeg stupca.

Dobijemo: $$(x_1 - x)(y_2 - y_1) - (y_1 - y)(x_2 - x_1) = 0$$

ili $$-(x - x_1)(y_2 - y_1) + (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

Odatle $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

a to je poznata jednadžba pravca kroz dvije zadane točke.

2. Napiši uvjet, koji moraju ispunjavati koeficijenti triju pravaca

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

da se ti pravci sijeku u istoj točki $T(x, y)$.

Da taj sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice x i y svedemo na homogeni sustav, stavimo:

$$x = \frac{X}{Z} \quad \text{i} \quad y = \frac{Y}{Z}, \text{ gdje je } Z \neq 0$$

Uvrstimo li te tako zvane homogene koordinate u zadane jednadžbe, i pomnožimo li jednadžbe sa Z, dobit ćemo homogeni sustav

$$\begin{aligned} A_1X + B_1Y + C_1Z &= 0 \\ A_2X + B_2Y + C_2Z &= 0 \\ A_3X + B_3Y + C_3Z &= 0 \end{aligned}$$

Sada stavimo da je determinanta sustava $\Delta = 0$, pa dobijemo traženi uvjet

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Napiši jednadžbu kružnice, koja prolazi trima zadanim točkama $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ i $T_3(x_3, y_3)$.

Znamo opću jednadžbu presjeka stošca

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(vidi Repet. elem. mat., IV, § 12), koja predočuje kružnicu za $C = A$ i $B = 0$, te njena opća jednadžba glasi:

$$\begin{aligned} A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F &= 0 \\ A(x_1^2 + y_1^2) + Dx_1 + Ey_1 + F &= 0 \\ A(x_2^2 + y_2^2) + Dx_2 + Ey_2 + F &= 0 \\ A(x_3^2 + y_3^2) + Dx_3 + Ey_3 + F &= 0 \end{aligned}$$

Kružnica prolazi točkom T_1, dakle također točkom T_2 i točkom T_3.

Dobili smo homogeni sustav od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice A, D, E i F. Taj sustav ima rješenja različita od očevidnih $A = 0$, $D = 0$, $E = 0$ i $F = 0$, ako je determinanta sustava $\Delta = 0$, t. j. ako je

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

To je tražena jednadžba kružnice kroz tri zadane točke.

Ako te tri zadane točke leže na istom pravcu, kružnica se reducira na pravac, pa njena jednadžba ne može više sadržavati članove s x^2 i y^2. Brišemo li stoga prvi redak i prvi stupac u determinanti, dobit ćemo uvjet da tri točke T_1, T_2 i T_3 leže na istom pravcu

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Razvijemo li determinantu, koja predočuje jednadžbu kružnice, na pr. po elementima prvog retka, dobit ćemo četiri subdeterminante trećeg reda, a svaka od njih dat će po tri subdeterminante drugog reda. Ukratko, dobit ćemo jednadžbu kružnice kroz tri zadane točke u obliku glomaznog izraza, koji se ne da zapamtiti.

Sad vidimo glavnu praktičku prednost determinanata: pomoću determinanata možemo mnoge dugačke i složene formule prikazati u jednostavnom, kratkom i preglednom obliku, koji se lako pamti.

Izračunaj za vježbu jednadžbu kružnice, koja prolazi točkama $T_1(2, 3)$, $T_2(1, 1)$ i $T_3(-2, 4)$. (Rezultat: $3x^2 + 3y^2 + x - 17y + 10 = 0$).

5. Svojstva determinanata

Na kraju navedimo nekoliko najvažnijih svojstava determinanata. Većina tih svojstava jasno slijedi iz naše diskusije o determinantama i navedenih primjera.

1. Determinantu možemo razviti po elementima bilo kojeg retka i bilo kojeg stupca. Uvijek dobijemo istu vrijednost determinante.

2. Determinanta ne mijenja vrijednost, ako zamijenimo retke determinante kako dolaze, stupcima kako dolaze, ili, drugim riječima, ako determinantu zaokrenemo za 180° oko njene glavne dijagonale, t. j. dijagonale koja ide od lijeva na desno.

To svojstvo slijedi iz svojstva 1.

3. Determinanta je jednaka nuli, ako su svi elementi jednog retka ili stupca nule. Razvijemo li takvu determinantu po elementima onog retka ili stupca, u kojem su nule, dobit ćemo nulu, jer će se svaka subdeterminanta množiti s nulom.

4. Determinanta mijenja predznak, ako zamijenimo međusobni položaj dvaju susjednih redaka ili stupaca.

To svojstvo slijedi iz sheme predznaka za računanje determinanata, jer elementi susjednih redaka ili stupaca imaju protivne predznake.

Na pr. zamijenimo li u determinanti $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +117$

međusobni položaj prvog i drugog retka, dobit ćemo:

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -117.$$

5. Determinanta je jednaka nuli, ako ima dva jednaka retka ili stupca. Da to dokažemo, pretpostavimo, na pr., da su u determinanti dva prva retka jednaka. Razvijemo tu determinantu po elementima prvog retka. Neka je D njena vrijednost Sada zamijenimo međusobni položaj jednakih redaka i opet razvijemo determinantu po elementima prvog retka. Obzirom na svojstvo 4. determinanta će promijeniti predznak, pa ćemo dobiti $-D$ za vrijednost determinante. Prema svojstvu 1. mora biti:

$$D = -D, \text{ a odatle je } 2D = 0 \text{ i } D = 0.$$

6. Imaju li svi elementi jednog retka ili stupca isti faktor, taj faktor pripada čitavoj determinanti pa ga možemo izlučiti, t. j. postaviti ispred determinante.

Razvijemo li takvu determinantu po elementima onog retka ili stupca, koji sadrži taj stalni faktor, svaka subdeterminanta bit će pomnožena tim faktorom, pa je jasno da ga možemo postaviti ispred čitava razvoja determinante.

Na pr.

$$\begin{vmatrix} a_1 & -2b_1 & c_1 \\ a_2 & -2b_2 & c_2 \\ a_3 & -2b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. Determinanta ne mijenja svoje vrijednosti, ako elementima jednog retka (ili stupca) pribrojimo pripadne elemente kojeg drugog retka (ili stupca) eventualno pomnožene bilo kojom konstantom.

Da dokažemo to svojstvo determinante, pomnožimo na pr. elemente drugog retka determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

s nekom konstantom α, pa ih pribrojimo pripadnim elementima prvog retka.

Dobijemo $$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{21} & a_{12} + \alpha a_{22} & a_{13} + \alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

Razvijemo li tako dobivenu determinantu po elementima prvog retka, vidjet ćemo, da je možemo prikazati u obliku zbroja dviju determinanata izlučivši prema svojstvu 6. konstantni faktor α:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

druga determinanta jednaka je nuli prema svojstvu 5., jer ima dva jednaka retka:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ a to je zadana determinanta.

Na pr. pomnožimo li sve elemente trećeg stupca determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 117$$

s —2, pa pribrojimo li ih elementima prvog stupca, dobit ćemo opet

$$\begin{vmatrix} 2+(-1)\cdot(-2) & 3 & -1 \\ -4+5\cdot(-2) & 0 & 5 \\ 5+3\cdot(-2) & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -14 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 117$$

Posljednje sedmo svojstvo determinanata pruža nam mogućnost da znatno pojednostavimo rješavanje determinanata.

Postupak se sastoji u tome, da pribrajajući, ili oduzimajući elemente jednog retka (ili stupca), koje u slučaju potrebe množimo s nekim istim brojem, od pripadnih elemenata drugog retka (ili stupca), nastojimo u jednom retku (ili stupcu) sve elemente osim jednoga svesti na nulu, pa po tom retku, odnosno stupcu razvijemo determinantu.

Primjeri

1. U primjeru na str. 9 imala je determinanta sustava zadanih jednadžbi oblik:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

Izračunajmo sada njenu vrijednost na jednostavniji način. U tu svrhu pomnožimo sve elemente prvog retka s — 2, pa ih pribrojimo elementima drugog retka.

Dobijemo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -9 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

Sada pomnožimo elemente trećeg retka s —2, pa ih pribrojimo elementima prvog retka:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 13 & -7 \\ 0 & 7 & -9 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

Determinantu razvijemo po elementima prvog stupca

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -117 + 49 = \underline{\underline{-68}}$$

Jasno je, da bismo prvu i drugu operaciju mogli izvršiti istodobno.

2.

$$\begin{vmatrix} 11 & -3 & 4 \\ 1 & -7 & 4 \\ -6 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

elementima prvog retka pribrojimo elemente trećeg retka

$$= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 4 \\ -6 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

elemente drugog retka pomnožimo s (—5), a zatim s (+6), pa ih pribrojimo elementima prvog, odnosno trećeg retka

$$= \begin{vmatrix} 0 & 36 & -21 \\ 1 & -7 & 4 \\ 0 & -38 & 19 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 36 & -21 \\ -38 & 19 \end{vmatrix} = \underline{114}$$

3. Izračunajmo na taj jednostavniji način determinantu sustava jednadžbi navedenih u primjeru na str. 14:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 7 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot 2 \,|\, \cdot 7 \\ = \\ \leftarrow \end{array} \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 8 & 6 & 0 & 26 \end{vmatrix} =$$

svojstvo 7)

$$= +1 \begin{vmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 2 & 10 & -3 \\ 8 & 6 & 26 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot 10 \cdot 6 \\ \leftarrow = \\ \leftarrow \end{array} \begin{vmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 72 & 0 & 87 \\ 50 & 0 & 80 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 72 & 87 \\ 50 & 80 \end{vmatrix} = 5760 - 4350 = \underline{1410}$$

(svojstvo 1) (svojstvo 7) (svojstvo 1)

6. Operacije s determinantama

a) Množenje determinanata

Pravilo za množenje dviju determinanata drugog reda možemo ukratko formulirati ovako:

Množi elemente prvog i drugog retka prve determinante redom s elementima prvog stupca druge determinante, rezultate množenja piši u obliku stupaca. pri čemu pribroj elementima tako dobivenog prvog stupca elemente drugog stupca,

Drugi stupac tražene determinante produkta dobit ćeš na isti način zbrajajući stupce nastale množenjem elemenata prvog i drugog retka prve determinante s elementima drugog stupca druge determinante. Prema tome, množenje dviju determinanata drugog reda vrši se ovako:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

Na sličan način množimo dvije determinante trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32} & a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33} \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

b) Kvadriranje determinanata

Uzmemo li u gore navedenom izrazu za umnožak dviju determinanata drugog reda, da su determinante identične, t. j. da je

$$b_{11} = a_{11}\,; \quad b_{12} = a_{12}\,; \quad b_{21} = a_{21}\,; \quad b_{22} = a_{22}\,,$$

dobit ćemo formulu za kvadrat determinanata drugog reda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{12}a_{11} + a_{22} \cdot a_{21} \\ a_{12} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{21} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{vmatrix}$$

Dobili smo takozvanu simetričnu determinantu, u kojoj su jednaki elementi, što leže simetrično spram glavne dijagonale.

Izračunaj na isti način kvadrat determinante trećeg reda. Rezultat će opet biti simetrična determinanta.

Primjeri

1.
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 6 + 4 \cdot 8 & 2 \cdot 7 + 4 \cdot 9 \\ 3 \cdot 6 + 5 \cdot 8 & 3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 44 & 50 \\ 58 & 66 \end{vmatrix} = \underline{4}$$

2.
$$\begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}^2 = 5^2 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}^2 = 25 \begin{vmatrix} 7^2 + 9^2 & 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 \\ 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 & 3^2 + 2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 25 \begin{vmatrix} 130 & 39 \\ 39 & 13 \end{vmatrix} = 25 \cdot 169 = \underline{4225}.$$

7. Matrice

Svrstamo li $m \cdot n$ elemenata u pravokutnu shemu, koja ima m redaka i n stupaca, dobit ćemo pravokutnu tablicu, koja služi izvorom različitih determinanata, pa se zove matrica.

Dok se determinanta stavi između dva vertikalna pravca, matrica se stavi između dva para pravaca. Matrica sama nema numeričke vrijednosti, jer je samo pregledno napisan sustav izračunatih veličina, obično koeficijenata jednadžbi. Determinante dobivene iz matrice zovu se njeni minori ili subdeterminante.

Na pr. iz matrice

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}$$

možemo dobiti tri determinante Δ drugog reda uzastopce izostavljajući jedan od stupaca, pri čemu svaki put stavimo na prvo mjesto onaj stupac koji neposredno slijedi iza izostavljenog:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Navedimo još jedan primjer.

Kako ćemo kasnije vidjeti iz formule (27a), koordinate vektorskog produkta dvaju vektora

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

jesu determinante drugog reda, koje se dobiju na gore navedeni način iz matrice

$$\begin{Vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{Vmatrix}$$

tako, da dobijemo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Rangom matrice zovemo broj, koji je jednak najvišem redu determinante te matrice, koja se ne pretvara u nulu. Prema tome, ako je rang matrice jednak p, tada se sve determinante reda $(p+1)$-ga te matrice pretvaraju u nulu, ali postoji bar jedna determinanta reda p, koja je različita od nule.

Rang matrice pokazuje broj linearno nezavisnih jednadžbi zadanog sustava

Na pr. neka je zadan sustav od tri linearne homogene jednadžbe s četiri nepoznanice

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1t &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2t &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3t &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Matrica sastavljena od sviju koeficijenata tog sustava glasi:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{Vmatrix}$$

Iz te matrice možemo na gore navedeni način dobiti četiri determinante III. reda:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & D_1 & A_1 \\ C_2 & D_2 & A_2 \\ C_3 & D_3 & A_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} D_1 & A_1 & B_1 \\ D_2 & A_2 & B_2 \\ D_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

Ako je tri rang matrice A, t. j. ako su sve determinante Δ_1, Δ_2, Δ_3 i Δ_4 različite od nule, ili bar jedna od njih različita od nule, tada gornji sustav (a) jednadžbi ima tri linearno nezavisne jednadžbe, koje daju jedno određeno rješenje sustava.

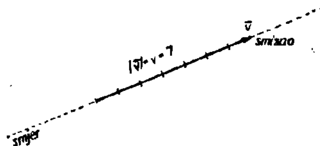
Gore navedena matrica A drugoga je ranga, ako je bar jedna od triju determinanata, koje izlaze iz matrice izostavljanjem jednog retka i stupca, različita od nule. Ona je, konačno, prvog ranga, ako je determinanta, koja izlazi iz matrice A izostavljanjem jednog retka i dvaju stupaca, različita od nule.

Često se govori i o rangu determinante, ako je determinanta različita od nule i reda n-toga, njezin je rang jednak njenom redu, t. j. n.

1. Općenito o vektorima i skalarima

Pod vektorom razumijemo veličinu, koja je određena

1) svojom apsolutnom vrijednošću ili modulom, ili duljinom izraženom nekim mjernim brojem,
2) smjerom (pravcem) i
3) smislom.

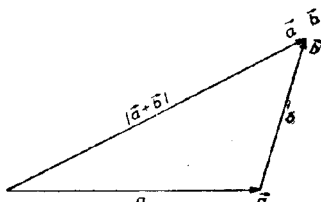


Sl. 15

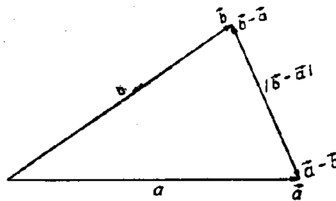
Vektor prikazujemo u obliku strjelice i označujemo ga malim slovom sa strjelicom, na pr. $\vec{v}$. Duljina strjelice, koja prikazuje vektor, predočuje njegovu apsolutnu vrijednost $|\vec{v}| = v$, a nanesena je u nekim odgovarajućim jedinicama (sl. 15).

Svaka usmjerena veličina jest, dakle, vektor, na pr. sila, pomak točke, brzina, ubrzanje. Veličine, koje su određene samo svojim mjernim brojem, pozitivnim ili negativnim, zovu se skalari, na pr. temperatura, gustoća, masa, radnja i t. d.

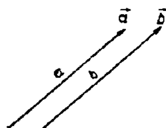
Vektori u ravnini već su nam poznati, govorili smo o njima u I. dijelu Repetitorija prikazujući kompleksne brojeve u obliku vektora. Znamo, također, zbrajati i oduzimati vektore. Pri oduzimanju vektora pamtimo, da je vektor razlike



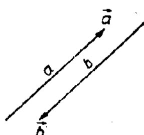
Sl. 16



Sl. 17



Sl. 18



Sl. 19

uvijek uperen prema minuendu. (Vidi sl. 16 i 17).

U daljnjem izlaganju govorit ćemo o slobodnim vektorima, t. j. o vektorima, koji nisu vezani na jednu točku; pa ih možemo usporedno, pomicati (translirati).

Prema tome, jednakost $\vec{a} = \vec{b}$ znači dva jednaka i usporedna vektora istog smisla (sl. 18), dok $\vec{a} = -\vec{b}$ znači, da su ti vektori protivnog smisla (sl. 19).

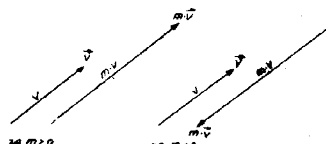
Primijetimo još, da umnožak skalara m i vektora $\vec{v}$, t. j. $m\vec{v}$ predočuje vektor, koji ima smjer vektora $\vec{v}$, kojemu je apsolutna vrijednost $m \cdot |\vec{v}| = mv$, t. j. m puta

veća od v, i koji ima za $m > 0$ smisao vektora $\vec{v}$, odnosno protivni smisao za $m < 0$. (Sl. 20).

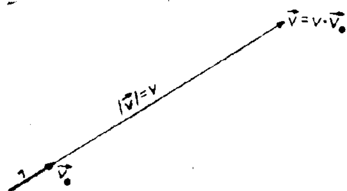
Iz toga slijedi, da svaki vektor $\vec{v}$ možemo prikazati kao umnožak duljine v toga vektora i jediničnog vektora ili orta $\vec{v}_0$, kojemu je duljina, t. j. apsolutna vrijednost $|\vec{v}_0| = 1$, pa je

$$\vec{v} = v \cdot \vec{v}_0 \tag{1}$$

(Vidi sl. 21).



Sl. 20



Sl. 21

Iz posljednje jednakosti slijedi da je

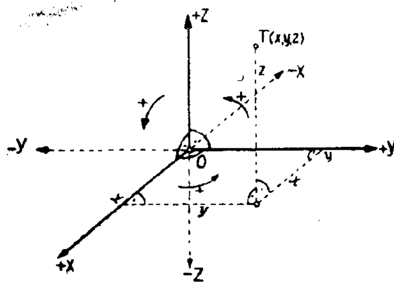
$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{v} \tag{2}$$

jedinični vektor dobijemo tako, da zadani vektor podijelimo s njegovom apsolutnom vrijednosti.

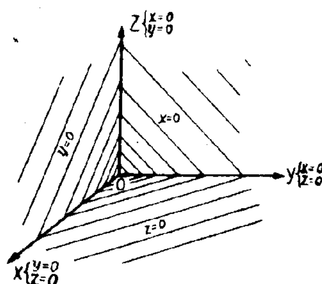
Položaj vektora u prostoru odredujemo obično pomoću prostornog pravokutnog koordinatnog sustava.

2. Prostorni pravokutni koordinatni sustav, koordinatne osi i ravnine

Za odredivanje položaja točke u prostoru služimo se obično pravokutnim koordinatnim sustavom. Taj sustav čine tri medusobno okomita pravca, koji ne leže u jednoj ravnini. To su koordinatne osi X, Y i Z. One se sijeku u jednoj točki O — ishodištu koordinatnog sustava.



Sl. 22



Sl. 23

Za predočivanje položaja i smjera vektora u prostoru uzima se t zv. **desni** koordinatni sustav prikazan na slici 22.

Taj sustav zove se desni, jer koordinatna os $+X$ prelazi u koordinatnu os $+Y$ okretanjem na desno, t. j. u smislu protivnom gibanju kazaljke na satu. Na isti način prelazi os $+Y$ u os $+Z$, a os $+Z$ u os $+X$. Označimo li na slici 22 s $+X$ koordinatnu os $+Y$, a s $+Y$ koordinatnu os $+X$, dobit ćemo lijevi koordinatni sustav.

Kako dva pravca, koji se sijeku, određuju jednu ravninu, koordinatne osi X, Y i Z određuju tri međusobno okomite koordinatne ravnine: horizontalnu XY i dvije vertikalne: ravninu YZ, koja je ispred nas, i ravninu XZ, koja je sa strane. Te tri ravnine dijele prostor u osam dijelova — oktanata. Položaj svake točke T u prostoru posve je određen s tri koordinate: apscise x, ordinate y i aplikate ili kote z (sl. 22). Kao svaki geometrijski lik imaju koordinatne ravnine i osi svoje jednadžbe.

Kako se vidi iz slike 23, za sve točke, koje leže u ravnini XY, uvijek je kota $z = 0$, pa je

$$z = 0 \text{ — jednadžba koordinatne ravnine } XY.$$

Iz sličnog je razloga

$$y = 0 \text{ — jednadžba ravnine } XZ$$
$$x = 0 \text{ — jednadžba ravnine } YZ$$

Os X je presjek koordinatnih ravnina XY i XZ, kojima su jednadžbe $z = 0$ i $y = 0$, pa je

$$\left.\begin{matrix} z = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right| \text{ jednadžba osi } X$$

Do istog rezultata dolazimo uočivši, da je za sve točke na osi X: $y = 0$ i $z = 0$.

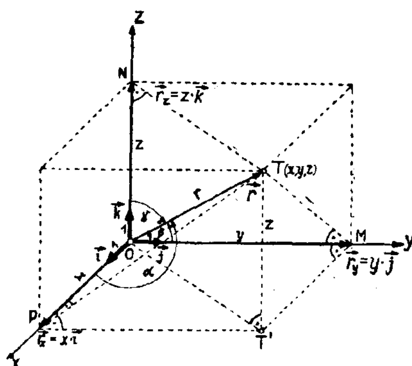
Iz sličnog je razloga

$$\left.\begin{matrix} z = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right| \text{ jednadžba osi } Y$$

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right| \text{ jednadžba osi } Z$$

3. Komponente vektora. Njegova duljina i smjer

Svakoj točki $T(x, y, z)$ prostora možemo dodijeliti jedan vektor spojivši pravcem tu točku T s ishodištem O koordinatnog sustava, i orijentiravši taj pravac prema točki T (sl. 24). Taj vektor $\vec{r}$ zove se radijvektor, jer izlazi iz ishodišta O. Duljina spojnice OT je njegova apsolutna vrijednost $|\vec{r}| = r$, a njegov smjer i smisao određen je kutovima α, β i γ, što ih vektor zatvara s koordinatnim osima $+X$, $+Y$ i $+Z$. Ti kutovi računaju se od pozitivnog smisla koordinatnih osi i primaju vrijednosti od 0 do 180°.



Sl. 24

Iz pravokutnog trokuta OTT' (sl. 24) imamo:

$$r^2 = OT'^2 + z^2$$

a kako se iz pravokutnog trokuta OMT' vidi, da je

$$OT'^2 = x^2 + y^2,$$

dobijemo važnu formulu za duljinu radijvektora

$$r = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3)$$

Ta formula daje istodobno udaljenost točke $T(x, y, z)$ od ishodišta O. To je prostorni Pitagorin poučak.

Iz pravokutnog trokuta OMT slijedi (kut OMT je pravi kut, jer je os Y okomita na desnoj pobočki paralelopipeda, dakle je okomita na svakom pravcu, koji leži u toj pobočki)

$$\cos \beta = \frac{y}{r}$$

Na isti način dobijemo iz pravokutnih trokuta ONT i OPT

$$\cos \gamma = \frac{z}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

ili uzevši u obzir formulu (3) dobijemo konačno:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{+\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{r} = \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (4)$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{r} = \frac{z}{+\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

To su takozvani kosinusi smjera vektora ili općenito bilo kojeg prostornog pravca.

Kvadriramo li i zbrojimo li izraze (4), dobit ćemo važnu vezu između kosinusa smjera vektora, odnosno pravca:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

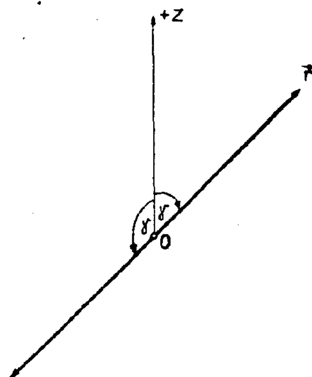
ili

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (5)$$

Iz te formule vidimo, da je jedan kut, na pr. $\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$ određen, ako su poznata druga dva kuta α i β. Ostaje neodređen samo predznak kosinusa, a to znači samo neodređenost smisla, a ne smjera, jer prema slici 25. imamo

$$\cos\gamma = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma$$

Negativni predznak bilo kojeg kosinusa smjera vektora pokazuje dakle, da dotični kut leži u drugom kvadrantu.



Sl. 25

Iz slike 24 vidimo, da radijvektor $\vec{r}$ rastavljamo u njegove skalarne komponente tako, da konstruiramo pravokutni paralelopiped, kojemu je jedan ugao točka T, dijagonala radijvektor $\vec{r}$, a bridovi su skalarne komponente tog radijvektora $\vec{r}$:

$$r_x = x \qquad r_y = y \quad \text{i} \quad r_z = z$$

Uzmemo li u obzir formule (4), dobijemo

$$\left.\begin{aligned} r_x &= x = r \cdot \cos\alpha \\ r_y &= y = r \cdot \cos\beta \\ r_z &= z = r \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right| \text{ skalarne komponente vektora } \vec{r} \qquad (6)$$

Skalarne komponente svakog **radijvektora jesu koordinate njegove** krajnje točke.

Primijetimo, da ćemo u daljnjem izlaganju **skalarne komponente vektora** jednostavno nazivati komponentama vektora.

Da dobijemo i vektorske komponente radijvektora $\vec{r}$, uvedimo **osnovne** jedinične vektore: $\vec{i}$ na osi X, $\vec{j}$ na osi Y i $\vec{k}$ na osi Z, pri čemu je

$$|\vec{i}| = 1, \qquad |\vec{j}| = 1 \quad \text{i} \quad |\vec{k}| = 1$$

Tada su prema slici 24 i formuli (1);

$$\begin{aligned} \vec{r}_x &= x \cdot \vec{i} \\ \vec{r}_y &= y \cdot \vec{j} \\ \vec{r}_z &= z \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

pa radijvektor $\vec{r}$ pišemo obično u obliku geometrijske sume:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad \textbf{(6a)}$$

Na pr. $\vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ predočuje radijvektor, kojemu krajnja točka T ima koordinate (2, 2, —1), pa su $r_x = 2$, $r_y = 2$ i $r_z = -1$ njegove skalarne komponente, dok su $\vec{r_x} = 2\vec{i}$, $\vec{r_y} = 2\vec{j}$ i $\vec{r_z} = -\vec{k}$ njegove vektorske komponente.

Prema formulama (3) i (4) možemo lako izračunati duljinu vektora i kutove α, β i γ, što ih taj vektor zatvara s koordinatnim osima:

Prema (3) $$r = +\sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

Prema (4) $$\cos\alpha = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

$$\cos\beta = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

$$\cos\gamma = -\frac{1}{3} = -0{,}333$$

Proba prema (5)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0{,}667^2 + 0.667^2 + 0{,}333^2 =$$
$$= 0{,}445 + 0{,}445 + 0{,}110 = 1{,}000$$

Konačno dobijemo:

$$\alpha = 48°10'$$
$$\beta = 48°10'$$
$$\gamma = 180° - 83°40' = 96°20'$$

Sve račune vršimo, naravno, logaritamskim računalom.

Analitički izraz (6a) za vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ima tu veliku prednost, što se zbrajanje, odnosno oduzimanje vektora napisanih u tom obliku svodi na jednostavno algebarsko zbrajanje, odnosno oduzimanje njegovih istoimenih komponenata, jer su komponente svakog vektora projekcije tog vektora u smjer koordinatnih osi, pa sve istoimene komponente imaju isti smjer — smjer dotične koordinatne osi.

Na pr.
$$\vec{r_1} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$$
$$\vec{r_2} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \quad \Big| \pm$$
$$\vec{r_1} + \vec{r_2} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$\vec{r_1} - \vec{r_2} = 7\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$$

Izračunaj za vježbu duljinu i smjer, t. j. kutove α, β i γ, zadanih vektora $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$, a također vektora zbroj $\vec{r_s}$ i razlike $\vec{r_d}$.

Uzmimo sada važan poseban slučaj. Neka je zadani radijvektor jedinični, t. j. $r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Tada prema (4) imamo:

$$x = \cos\alpha$$
$$y = \cos\beta \qquad (7)$$
$$z = \cos\gamma$$

To znači: ako je vektor jedinični, tada su skalarne komponente toga vektora njegovi kosinusi smjera.

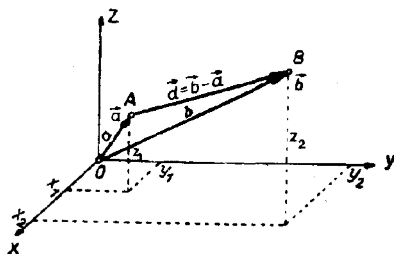
Iz toga slijedi: ako hoćemo da nekom pravcu u prostoru dodijelimo smjer, dovoljno je da mu dodijelimo jedinični vektor.

Primijetimo, da taj pravac ne mora prolaziti ishodištem koordinatnog sustava, jer se njegov smjer ne će promijeniti, ako ga paralelnim pomakom prenesemo u ishodište.

Kako prema (2) jedinični vektor $\vec{v}_0$, koji pripada zadanom vektoru $\vec{v}$, dobijemo tako, da $\vec{v}$ podijelimo s njegovom duljinom v, bit će jedinični radijvektor

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k},$$

pa je $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$, a to su naše formule (4).



Sl. 26

Uzmimo sada da zadani vektor $\vec{d}$ nije radijvektor, t. j. ne izlazi iz ishodišta koordinatnog sustava, već polazi iz točke $A(x_1, y_1, z_1)$, a svršava u točki $B(x_2, y_2, z_2)$. (Vidi sl. 26).

Dodijelimo točki $A(x_1, y_1, z_1)$ radijvektor $\vec{a}$, kojemu su komponente $\begin{cases} x_1 \\ y_1, \\ z_1 \end{cases}$ a točki $B(x_2, y_2, z_2)$ radijvektor $\vec{b} \begin{cases} x_2 \\ y_2, \\ z_2 \end{cases}$ t. j. dodijelimo točkama A i B vektore

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \qquad \text{(a)}$$

Iz slike 26 vidimo, da je vektor $\vec{d}$ razlika vektora $\vec{b}$ i $\vec{a}$, t. j. $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ (vidi također sliku 17), pa iz jednakosti (a) slijedi:

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \tag{8}$$

Prema tome vektor $\vec{d}$ ima komponente $\begin{cases} d_x = x_2 - x_1 \\ d_y = y_2 - y_1 \\ d_z = z_2 - z_1 \end{cases}$

njegova duljina prema (3) glasi:

$$d = + \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

ili obzirom na (8)

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{9}$$

Ta važna formula daje također **međusobnu udaljenost dviju točaka** $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ u prostoru.

Kosinuse smjera vektora $\vec{d}$ dobijemo prema (4):

$$\cos\alpha = \frac{d_x}{d} = \frac{x_2 - x_1}{d}$$
$$\cos\beta = \frac{d_y}{d} = \frac{y_2 - y_1}{d} \tag{10}$$
$$\cos\gamma = \frac{d_z}{d} = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

Primjer. Odredi duljinu i smjer vektora $\vec{d} = \vec{AB}$, gdje je $A(3, -2, 6)$ i $B(-1, 0, -4)$.

Prema (8)

$$\vec{d} \begin{cases} d_x = -1 - 3 = -4 \\ d_y = 0 + 2 = 2 \\ d_z = -4 - 6 = -10 \end{cases}$$

pa je

$$\vec{d} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k}$$

Prema (9):

$$d = + \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (-10)^2} = \sqrt{16 + 4 + 100} = \sqrt{120} = 10{,}95$$

Prema (10):

$$\cos\alpha = \frac{-4}{10{,}95} = -0{,}365$$
$$\cos\beta = \frac{2}{10{,}95} = 0{,}183$$
$$\cos\gamma = \frac{-10}{10{,}95} = -0{,}913$$

Proba: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0{,}133 + 0{,}033 + 0{,}834 = 1{,}000$

Konačno

$$\alpha = 180^\circ - 68^\circ 40 = 111^\circ 20'$$
$$\beta = 79^\circ 30'$$
$$\gamma = 180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$$

4. Skalarni ili unutarnji produkt dvaju vektora

Svaka grana matematike ima svoje simbole ili formule za izraze, koji često dolaze. Već smo u srednjoj školi naučili $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b) \cdot (a - b)$ i t. d., pa se posve mehanički služimo tim formulama. Tako i vektorska algebra ima svoje simbole, koji nam izgledaju u prvo vrijeme tuđi i nerazumljivi, iako nisu ništa kompliciraniji od gore navedenih. Uzrok je tome samo taj, što nemamo dovoljno vježbe u računanju s tim simbolima. Zadatak je svakoga, tko studira višu matematiku, da mu simboli vektorske algebre budu bliski i razumljivi, tako da se može njima služiti kao s običnim algebarskim formulama.

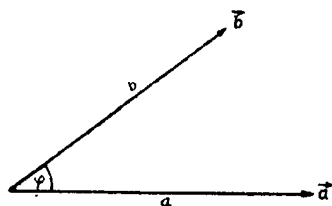
Najjednostavniji od tih simbola jest skalarni ili unutarnji produkt dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Oznaka skalarnog produkta: $(\vec{a}\,\vec{b})$ ili jednostavno $\vec{a}\,\vec{b}$, pri čemu držimo uvijek na pameti da je to skalar!

Pod skalarnim produktom dvaju vektora razumijevamo umnožak duljina tih vektora i kosinusa kuta između njih.

Prema slici 27 skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ glasi, dakle:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi \tag{11}$$



Sl. 27

Primijetimo, da skalarni produkt može biti i negativan, i to kad kut, što ga međusobno zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, leži u II. ili III. kvadrantu.

Kako skalarni produkt možemo napisati i u obliku

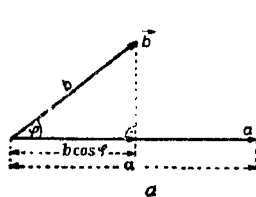
$$\vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cos \varphi = b \cdot a \cdot \cos \varphi \tag{11a}$$

možemo ga obzirom na slike 28 formulirati i ovako:

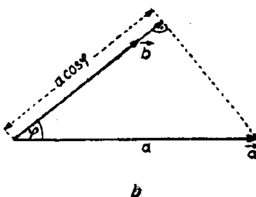
Skalarni produkt dvaju vektora jednak je umnošku duljine jednog vektora i duljine projekcije drugog vektora u smjer prvoga.

Iz (11a) slijedi:

$$b_a = b \cdot \cos \varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{a} \quad \text{i} \quad a_b = a \cdot \cos \varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{b} \tag{12}$$

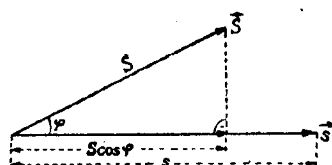


a



b

Sl. 28



Sl. 29

To znači: da dobijemo duljinu projekcije jednog vektora u smjer drugoga, dovoljno je podijeliti skalarni produkt vektora s duljinom tog drugog vektora.

Ako je jedan vektor jedinični, na pr. vektor $\vec{b} = \vec{b}_0$, pa je $b_0 = 1$, tada skalarni produkt prema (11) prima oblik:

$$\vec{a}\,\vec{b}_0 = a \cdot 1 \cdot \cos\varphi = a \cos\varphi \qquad (12a)$$

a to je prema slici 28 duljina projekcije vektora $\vec{a}$ u smjer vektora $\vec{b}$. Prema tome: da odredimo duljinu projekcije jednog vektora u smjer drugoga, možemo postupati i tako, da izračunamo skalarni produkt prvog vektora i jediničkog vektora, koji pripada drugom vektoru (vidi dalje primjer 1).

Kao karakterističan primjer za skalarni produkt navedimo radnju A, što je vrši stalna sila S na putu $\vec{s}$.

Znamo da je radnja umnožak puta i projekcije sile u smjer puta, pa prema slici (29) imamo:

$$A = s \cdot S \cos\varphi = S \cdot s \cdot \cos\varphi = \text{prema (11)} = \vec{S}\,\vec{s}$$

Radnja stalne sile je dakle skalarni produkt vektora sile i vektora pomaka.

Ako je $\varphi = 90°$, t. j. ako je smjer sile okomit na smjer puta, radnja $A = 0$, jer je $\cos 90° = 0$.

Prvi posebni slučaj.

Neka su vektori međusobno okomiti: $\vec{a} \perp \vec{b}$, t. j. $\varphi = 90°$

Prema (11): $\vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos 90° = a \cdot b \cdot 0 = 0$

Uzmimo obratno: neka je skalarni produkt dvaju vektora jednak nuli:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi = 0$$

Kako je $a \neq 0$ i $b \neq 0$, mora biti $\cos\varphi = 0$, t. j. $\varphi = 90°$, odnosno 270°. Slijedi praktički vrlo važno pravilo:

Da su dva vektora međusobno okomita, nužno je i dovoljno, da je njihov skalarni produkt jednak nuli.

Pada u oči razlika između skalarnog produkta dvaju vektora i produkta dvaju brojeva. Posljednji je jednak nuli kad je jedan od faktora jednak nuli, dok se skalarni produkt poništava osim toga i u slučaju, kad su oba vektora međusobno okomita.

Posljedica

$$\begin{aligned} \vec{i}\,\vec{j} &= \vec{j}\,\vec{i} = 0 \\ \vec{j}\,\vec{k} &= \vec{k}\,\vec{j} = 0 \\ \vec{k}\,\vec{i} &= \vec{i}\,\vec{k} = 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

jer su osnovni jedinični vektori međusobno okomiti (vidi sl. 24).

Drugi posebni slučaj.

Neka su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, t. j. međusobno paralelni ili leže na istom pravcu, i neka su istog smisla, t. j. kut $\varphi = 0$. Prema (11) imamo:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos 0 = a \cdot b \tag{14}$$

Skalarni produkt dvaju paralelnih vektora istog smisla jednak je umnošku njihovih duljina.

Ako su kolinearni vektori protivnog smisla, kut $\varphi = 180°$, pa je

$$\vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos 180° = -a \cdot b$$

t. j. jednak je negativnoj vrijednosti umnoška njihovih duljina.

Posljedica

Neka su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaki, t. j. $\vec{b} = \vec{a}$.

Prema (14) imamo:

$$\vec{a}\,\vec{a} = \vec{a}^{\,2} = a \cdot a = a^2 \tag{15}$$

Skalarni kvadrat vektora jednak je kvadratu njegove duljine.

Odatle slijedi:

$$\begin{aligned} \vec{i}\,\vec{i} &= \vec{i}^{\,2} = 1^2 = 1 \\ \vec{j}\,\vec{j} &= \vec{j}^{\,2} = 1^2 = 1 \\ \vec{k}\,\vec{k} &= \vec{k}^{\,2} = 1^2 = 1 \end{aligned} \tag{16}$$

Skalarni kvadrat jediničkog vektora je 1.

Za skalarni produkt vrijedi:

1. Zakon komutacije,

jer je prema definiciji skalarnog produkta

$$\vec{b}\,\vec{a} = b \cdot a \cdot \cos \varphi = \text{prema (11)} = \vec{a}\,\vec{b}$$

2. Zakon distribucije

Lako se dade pokazati da je

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} \tag{17}$$

Prema tome je na pr.

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \pm 2(\vec{a}\,\vec{b}) + \vec{b}^{\,2} = \text{prema (15)} = a^2 \pm 2(\vec{a}\,\vec{b}) + b^2 = \tag{17a}$$
$$= a^2 \pm 2ab \cos \varphi + b^2$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2} = \text{prema (15)} = a^2 - b^2 \qquad \textbf{(17b)}$$

Izrazimo sada skalarni produkt dvaju vektora pomoću komponenata tih vektora.

Tražimo $\vec{a}\,\vec{b}$, gdje je

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Kako za skalarni produkt vrijedi zakon distribucije, izmnožimo skalarno izraze za $\vec{a}$ i $\vec{b}$ prema formuli (17), pri čemu skalarne komponente množimo obično kao brojeve, a jedinične vektore množimo skalarno:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_x \cdot b_x(\vec{i}\,\vec{i}) + a_y \cdot b_x(\vec{j}\,\vec{i}) + a_z b_x(\vec{k}\,\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i}\,\vec{j}) + a_y b_y(\vec{j}\,\vec{j}) + a_z b_y(\vec{k}\,\vec{j}) +$$
$$+ a_x b_z(\vec{i}\,\vec{k}) + a_y b_z(\vec{j}\,\vec{k}) + a_z b_z(\vec{k}\,\vec{k})$$

Uzevši u obzir da je prema (13)

$$\vec{j}\,\vec{i} = \vec{k}\,\vec{i} = \ldots\ldots = \vec{j}\,\vec{k} = 0$$

a prema (16)

$$\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1$$

dobijemo:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \textbf{(18)}$$

Skalarni produkt dvaju vektora jednak je zbroju produkata istoimenih skalarnih komponenata tih vektora.

Na taj način računa se obično skalarni produkt dvaju vektora.

Na pr. za

$$\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$$
$$\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = 5 \cdot 1 + (-3)\cdot(-2) + 7\cdot(-8) = 5 + 6 - 56 = \underline{\underline{-45}}$$

Kut dvaju vektora

Prema (11): $\quad \vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$

Odatle

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{a \cdot b} \qquad \textbf{(19)}$$

Kosinus kuta, što ga međusobno zatvaraju dva vektora, dobijemo tako, da skalarni produkt tih vektora izračunavši ga, podijelimo s umnoškom duljina tih vektora.

Na pr. traži se kut, što ga međusobno zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, gdje je

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$
$$\vec{b} = -5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$$

Prema (19), (18) i (3) imamo:

$$\cos\varphi = \frac{-1\cdot(-5) + 2\cdot 1 - 3\cdot 6}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{25+1+36}} = -\frac{11}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{62}} = -\frac{11}{\sqrt{868}} = -\frac{11}{29{,}5} = -0{,}373$$

$$\varphi_0 \doteq 68^\circ, \text{ odnosno } \varphi \doteq 180^\circ - 68^\circ = \underline{112^\circ}.$$

Poseban slučaj: Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori, t. j. $|\vec{a}_0| = a_0 = 1$ i $|\vec{b}_0| = b_0 = 1$, tada prema (19):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_0\,\vec{b}_0}{1\;1} = \vec{a}_0\,\vec{b}_0 \tag{19a}$$

To znači: ako su vektori jedinični, njihov skalarni produkt daje neposredno kosinus kuta, što ga ti vektori međusobno zatvaraju.

Navedimo nekoliko primjera za primjenu skalarnog produkta.

Primjeri

1. Odredi projekciju vektora $\vec{a} = 6\vec{i} - 10\vec{j} - 8\vec{k}$ u smjer vektora $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Prvi način prema (12) i (18):

Duljina tražene projekcije: $c = \dfrac{6\cdot 2 + (-10)\cdot 1 + (-8)\cdot(-2)}{\sqrt{4+1+4}} =$

$$= \frac{12 - 10 + 16}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = \underline{6}$$

Drugi način prema (2), (12a) i (18):

$$\vec{b}_0 = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \tag{a}$$

$$c = 6\cdot\frac{2}{3} - 10\cdot\frac{1}{3} + 8\cdot\frac{2}{3} = 4 - \frac{10}{3} + \frac{16}{3} = \underline{6}$$

Time smo dobili samo duljinu projekcije vektora $\vec{a}$ u smjer vektora $\vec{b}$. Da dobijemo komponente toga vektora u smjeru koordinatnih osi, uočimo da taj vektor leži na vektoru $\vec{b}$, pa ima iste kosinuse smjera i da su komponente jediničnog vektora $\vec{b}$ kosinusi smjera toga vektora.

Prema (6) i obzirom na (a) dobijemo:

$$c_x = c \cos \alpha = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \;;\; c_y = r \cos \beta = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ i } c_z = r \cos \gamma = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -4$$

$$\underline{\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}}$$

Do istog rezultata možemo doći jednostavnije prema formuli (1):

$$\vec{c} = c \cdot \vec{b_o} = 6\left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \underline{4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}}$$

2. Dokaži da su dijagonale romba međusobno okomite.

Smatramo dvije stranice romba kao vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (nariši sliku!). Tada su **dijagonale romba** vektori $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$. Izračunajmo skalarni produkt tih dijagonalnih vektora:

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \text{prema (17 b)} = a^2 - b^2 = 0,$$

jer su u rombu stranice jednake ($b = a$).

Dokazali smo, da je skalarni produkt dijagonalnih vektora jednak nuli, dakle su ti vektori, t. j. dijagonale romba, međusobno okomite.

3. Izvedi pomoću skalarnog produkta kosinusov poučak.

Označimo dvije stranice zadanog trokuta (sl. 30) kao vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada odgovara trećoj stranici c vektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Kvadrirajmo skalarno taj izraz. Prema (17a) imamo:

$$\vec{c}^2 = a^2 - 2(\vec{a}\,\vec{b}) + b^2$$

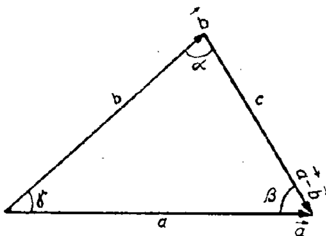
Prema (11) imamo

$$c^2 = a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2$$

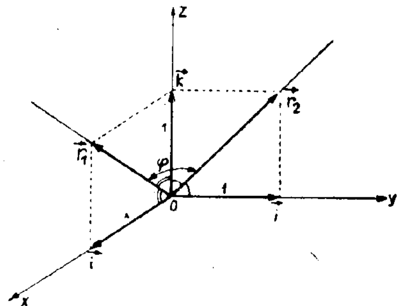
ili

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

a to je kosinusov poučak za stranicu c trokuta.



Sl. 30



Sl. 31

4. Zadane su četiri točke u prostoru $B(1, -2, 3)$, $A(4, -4, -3)$, $D(2, 4, 3)$ i $C(8, 6, 6)$. Izračunaj duljinu d projekcije vektora $\vec{AB}$ u smjer vektora $\vec{CD}$.

Prema (8):

$$\vec{AB} = (1 - 4)\vec{i} + (-2+4)\vec{j} + (3 + 3)\vec{k} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{CD} = (2 - 8)\vec{i} + (4 - 6)\vec{j} + (3 - 6)\vec{k} = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

Prema (12) i (18):

$$d = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \frac{-3 \cdot (-6) + 2(-2) + 6 \cdot (-3)}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{+18 - 4 - 18}{\sqrt{49}} = -\frac{4}{7}$$

$$\underline{d = \frac{4}{7}}$$

5. Izračunaj kut, što ga međusobno zatvaraju raspolovnice ravnine XZ i YZ.

Dodijelimo raspolovnicama radiivektore $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$, pa traženi kut odredimo kao kut tih vektora (sl. 31).

Prema slici 31:

$$\vec{r_1} = \vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{r_2} = \vec{j} + \vec{k}$$

Prema (19) i (18):

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\varphi = 60^0}$$

5. Vektorski ili vanjski produkt dvaju vektora

To je drugi vrlo važni simbol vektorske algebre.

Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označuje se s

$$[\vec{a}\,\vec{b}] \quad \text{ili} \quad \vec{a} \times \vec{b}$$

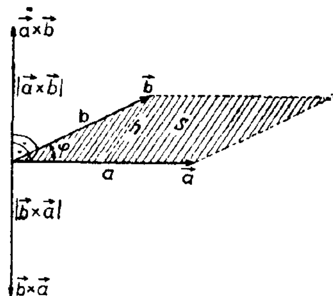
pri čemu pamtimo, da je to vektor.

Pokažimo, što se razumije pod duljinom, smjerom i smislom toga vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ (sl. 32)

Duljina je vektora $\vec{a} \times \vec{b}$, t. j.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi \qquad (20)$$

Smjer je okomit na ravnini, koju određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Sl. 32

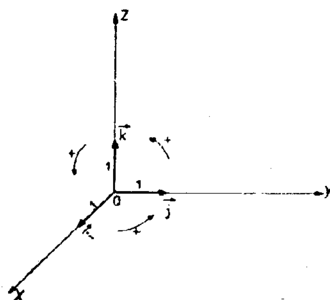
Smisao je određen pravilom desne ruke (palac je vektor, koji stoji na prvom mjestu, kažiprst — drugi po redu vektor, srednji prst pokazuje tada smisao vektorskog produkta) ili pravilom desnog vijka, ili desnog koordinatnog sustava (vidi sl. 22).

Pravilo desne ruke jasno pokazuje, da vektor $\vec{b} \times \vec{a}$ ima protivni smisao od vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ (vidi sl. 32) t. j.

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Za vektorski produkt ne vrijedi dakle zakon komutacije.

Iz definicije vektorskog produkta slijedi, da je



Sl. 33

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

jer je prema (20):

duljina vektora $\vec{i} \times \vec{j}$:

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1,$$

njegov smjer je okomit na ravnini XY, ima dakle smjer osi Z, a smisao je uperen prema gore (pravilo desne ruke ili desnog koordinatnog sustava), a to je osnovni jedinični vektor $\vec{k}$ (sl. 33).

Dakle

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

ali:

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \tag{21a}$$

Iz istog razloga

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \tag{21b}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

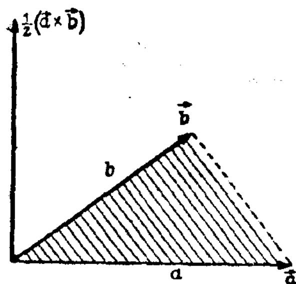
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \tag{21c}$$

Konstruiramo li paralelogram, kojemu su stranice a i b (sl. 32), tada je površina toga paralelograma

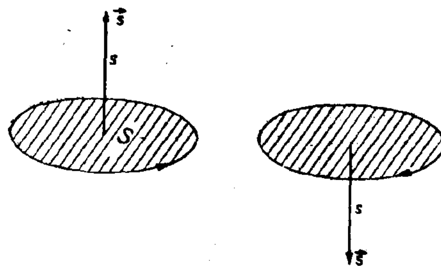
$$S = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin \varphi = \text{prema (20)} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

t. j. duljina vektorskog produkta numerički je jednaka površini paralelograma, kojemu su stranice duljine vektora, koji čine vektorski produkt.

Odatle slijedi, da svakom omeđenom dijelu ravnine možemo dodijeliti vektor, ako rub toga dijela ravnine orijentiramo.



Sl. 34

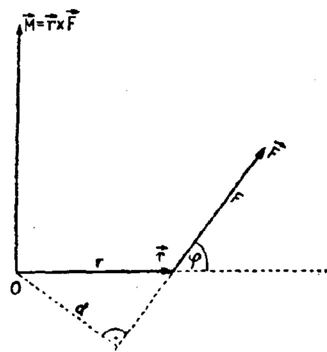


Sl. 35

Prema tome, trokutu možemo dodijeliti polovinu vektorskog produkta, jer površina trokuta iznosi samo polovinu površine paralelograma (sl. 34), a površini S u slici 35 vektor $\vec{S}$ kojemu je duljina $|\vec{S}| = S$, pri čemu pomoću pravila desnog vijka lako određujemo smisao vektora.

Kao primjer za vektorski produkt navedimo moment sile $\vec{F}$ obzirom na točku O (sl. 36). Tvrdimo, da je moment jednak vektorskom produktu vektora položaja $\vec{r}$ i vektora sile $\vec{F}$, t. j.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$



Sl. 36

Znamo, da je moment sile obzirom na točku jednak umnošku sile F i kraka d, t. j.

$M = F \cdot d =$ prema sl. 36 $= F \cdot r \cdot \sin \varphi$,

a to je apsolutna vrijednost vektorskog produkta $\vec{r} \times \vec{F}$, jer je

$$|\vec{M}| = M = |\vec{r} \times \vec{F}| = \text{prema (20)} = r \cdot F \cdot \sin \varphi$$

Iz toga slijedi, da moment sile obzirom na točku možemo prikazati u obliku vektora $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (sl. 36).

Primijetimo, da i spreg sila možemo predstaviti kao vektor, kojemu je apsolutna vrijednost jednaka momentu toga sprega, smjer mu je okomit na ravninu sprega, a smisao je određen pravilom desnog vijka.

Prvi posebni slučaj

Neka su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno okomiti, t. j. $\varphi = 90°$

Tada prema (20):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin 90° = a \cdot b \qquad (22)$$

Ako su vektori međusobno okomiti, apsolutna vrijednost njihovog vektorskog produkta jednaka je umnošku njihovih duljina.

Drugi posebni slučaj

Neka su vektori kolinearni, t. j. paralelni, ili neka leže na istom pravcu. U tom je slučaju $\varphi = 0$ ili $180°$, pa prema (20) imamo:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin 0 = 0.$$

Vrijedi i obrat:

Iz $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin 0 = 0$ slijedi, da uz $a \neq 0$ i $b \neq 0$ mora biti $\varphi \equiv 0$ ili $180°$

Prema tome je za $\varphi = 0$ ili $180°$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \tag{23}$$

Da su dva vektora međusobno paralelna, nužno je i dovoljno, da je njihov vektorski produkt jednak nuli.

Posljedica

Kako pod jednakim vektorima razumijevamo vektore iste duljine, istoga smjera i istoga smisla, jednaki vektori su međusobno paralelni, pa za $\vec{b} = \vec{a}$ imamo prema (23):

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \tag{24}$$

Vektorski kvadrat vektora jednak je nuli.
Prema tome

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 \\ \vec{j} \times \vec{j} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Za vektorski produkt

1. ne vrijedi zakon komutacije, jer je, kako smo već vidjeli,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \tag{26}$$

pa vektorski produkt nema svojstva komutativnosti, koje je skalarni produkt još sačuvao.

2. vrijedi zakon distribucije

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d} \tag{26a}$$

Prema tome je na pr. vektorski kvadrat

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}=\text{prema (24) i}$$
$$(26)=0-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}+0=0$$

a

$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}=$$
$$=\text{prema (24) i (26)}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}=2(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (26b)$$

Budući da za vektorski produkt ne vrijedi zakon komutacije, pri vektorskom množenju ne smijemo mijenjati redoslijed faktora!

Izrazimo vektorski produkt dvaju vektora pomoću njihovih komponenata. U tu svrhu izmnožimo vektorski vektore

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$
$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

uzevši u obzir, da za vektorski produkt vrijedi zakon distribucije (26a):

$$\vec{a}\times\vec{b}=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+$$
$$+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})$$

Uzevši u obzir formule (21) i (25) dobijemo:

$$\vec{a}\times\vec{b}=0+a_yb_x(-\vec{k})+a_zb_x\vec{j}+a_xb_y\vec{k}+0+a_zb_y(-\vec{i})+a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_z\vec{i}+0$$

ili

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k} \qquad (27)$$

Taj izraz za vektorski produkt možemo napisati u obliku determinante

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix} \qquad (27a)$$

jer, razvijemo li determinantu po elementima prvog retka, dobijemo:

$$\vec{i}(a_yb_z-a_zb_y)-\vec{j}(a_xb_z-a_zb_x)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x)=$$
$$=\vec{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\vec{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x)=\text{prema (27)}=\vec{a}\times\vec{b}$$

(vidi također § 1, 7. Matrice).

Primjer

Izračunaj duljinu i kosinuse smjera vektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ i dokaži, da je taj vektor okomit na vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pri čemu je

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

Prema (27a):

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i}(12-4) - \vec{j}(-6-6) + \vec{k}(2+6) = \underline{8\vec{i} + 12\vec{j} + 8\vec{k}}$$

$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = +\sqrt{64 + 144 + 64} = \sqrt{272} = 16{,}5$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{16{,}5} = \underline{0{,}485}$$

$$\cos\beta = \frac{12}{16{,}5} = \underline{0{,}727}$$

$$\cos\gamma = \frac{8}{16{,}5} = \underline{0{,}485}$$

Proba: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0{,}235 + 0{,}529 + 0{,}235 = 0{,}999 \doteq 1$

Da dokažemo, da je vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ okomit na vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, izračunajmo skalarne produkte vektora $\vec{c}$ i $\vec{a}$, a zatim $\vec{c}$ i $\vec{b}$.

Prema (18) imamo:

$$\vec{c}\,\vec{a} = 8 \cdot 1 + 12(-2) + 8 \cdot 2 = 8 - 24 + 16 = 0$$

$$\vec{c}\,\vec{b} = 8 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 8(-6) = 24 + 24 - 48 = 0$$

Kako su oba skalarna produkta jednaka nuli, vektor $\vec{c}$ stoji okomito na vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a to nam je poznato prema definiciji smjera vektorskog produkta (vidi sl. 32).

Kut dvaju vektora

Iz (20)

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

slijedi

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{a \cdot b} \tag{28}$$

Kut dvaju vektora možemo dakle izračunati i iz njihova vektorskog produkta.

Poseban slučaj

Ako su vektori jedinični, t. j. $|\vec{a_0}| = a_0 = 1$ i $|\vec{b_0}| = b_0 = 1$, tada prema (28):

$$\sin \varphi = |\vec{a_0} \times \vec{b_0}| \tag{28a}$$

t. j. apsolutna vrijednost vektorskog produkta dvaju jediničnih vektora jednaka je sinusu kuta, što ga međusobno zatvaraju ta dva vektora.

Odredimo na pr. kut vektora

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{b} = -5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$$

koji smo u primjeru na str. 35 već odredili pomoću skalarnog produkta, pa smo dobili $\cos \varphi = -0{,}373$.

Prema (27):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -7 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{k}(-5 + 14) + 3(5\vec{i} + 7\vec{j}) = 15\vec{i} + 21\vec{j} + 9\vec{k}$$

Prema (28) i (3):

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{225 + 441 + 81}}{\sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{25 + 1 + 36}} = \sqrt{\frac{747}{14 \cdot 62}} = \sqrt{\frac{747}{868}} = \sqrt{0{,}862} = 0{,}929$$

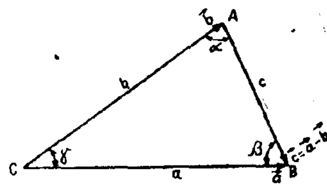
Proba: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = (-0{,}373)^2 + (0{,}929)^2 = 0{,}138 + 0{,}862 = 1$

$\varphi \doteq 68$ ili $\varphi \doteq 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$

Primjeri za primjenu vektorskog produkta.

1. Izvedi vektorski sinusov poučak za trokut.

Stranicama a, b, c zadanog trokuta ABC dodijelimo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (sl. 37).



Sl. 37

Kako je prema slici $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, možemo pisati da su jednaki i vektori:

$$\vec{c} \times \vec{a} = (\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{a}$$

ili

$$\vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Dakle:

$$\vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Odatle:

$$|\vec{c} \times \vec{a}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

ili prema (20) i slici 37:

$$c \cdot a \cdot \sin \beta = a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

Odatle:

$$\underline{b : c = \sin \beta : \sin \gamma}$$

Primijetimo, da ćemo doći do istog rezultata, ako jednakost $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ pomnožimo vektorski s $\vec{a}$.

2. Izvedi vektorski Heronovu formulu za površinu S trokuta.

Budući da površini trokuta odgovara polovina vektorskog produkta vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, imamo prema sl. 37:

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$

ili, ako obje strane te jednakosti kvadriramo.

$$S^2 = \frac{1}{4} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|^2$$

Odatle prema (20) i slici 37:

$$S^2 = \frac{1}{4} (a \cdot b \cdot \sin \gamma)^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2 \gamma$$

Pomnožimo li tu jednakost s 4 i uzmemo li u obzir da je $\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma$ dobijemo

$$4S^2 = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \gamma$$

ili prema (11)

$$4S^2 = a^2 b^2 - \left(\vec{a}\,\vec{b} \right)^2 \qquad \text{(a)}$$

Prema (17a) znamo da je

$$\left(\vec{a} - \vec{b} \right)^2 = a^2 - 2 (\vec{a}\,\vec{b}) + b^2$$

ili

$$c^2 = a^2 - 2(\vec{a}\,\vec{b}) + b^2$$

jer je prema slici i (15)

$$\left(\vec{a} - \vec{b} \right)^2 = \left(\vec{c} \right)^2 = c^2$$

Odatle

$$\vec{a}\,\vec{b} = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2)$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$4S^2 = a^2 b^2 - \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

ili

$$4\,S^2 = \left[ab + \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2) \right] \left[ab - \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2) \right] \qquad \text{(b)}$$

Uzmemo li u obzir da je

$$ab + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2}$$

$$ab - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2}$$

i uvedemo li oznaku

$$a + b + c = 2s$$

tada jednakost (b) prima oblik

$$4S^2 = \frac{1}{4} 2s(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)$$

ili

$$\underline{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

a to je Heronova formula za površinu trokuta.

3. Zadana su dva vektora

$$\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Izračunaj površinu S paralelograma, kojemu su stranice zadani vektori. Kako je apsolutna vrijednost vektorskog produkta numerički jednaka površini paralelograma, čije su stranice vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, zadatak se svodi na određivanje duljine vektorskog produkta $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 1 \\ -1 & +2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(12 - 2) - \vec{j}(-20 + 1) + \vec{k}(10 - 3) = 10\vec{i} + 19\vec{j} + 7\vec{k},$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{100 + 361 + 49} = \sqrt{510} = \underline{22{,}6}$$

4. Izračunaj površinu S trokuta kome su stranice vektori.

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

Znamo da površini trokuta odgovara polovina vektorskog produkta, pa je

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

Prema (27a)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-4 + 15) - \vec{j}(-8 - 3) + \vec{k}(10 + 1) = 11\vec{i} + 11\vec{j} + 11\vec{k}$$

Prema (3)

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{11^2 + 11^2 + 11^2} = 11\sqrt{3}$$

$$S = \frac{11}{2}\sqrt{3}$$

5. Odredi duljinu projekcije vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + \vec{k}$ na vektor $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c}$, gdje je

$$\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

Prema (27a):

$$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}(12 + 4) - \vec{j}(8 + 8) + \vec{k}(4 - 12) = 16\vec{i} - 16\vec{j} - 8\vec{k}$$

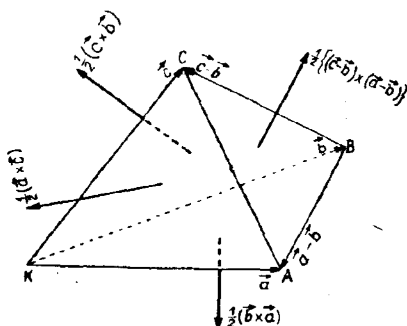
Prema (12) i (18):

$$a_d = \frac{\vec{a}\,\vec{d}}{d} = \frac{3 \cdot 16 + (-12) \cdot (-16) + 1 \cdot (-8)}{\sqrt{256 + 256 + 64}} = \frac{48 + 192 - 8}{\sqrt{576}} = \frac{232}{24} = \frac{29}{3}$$

6. Zbroj vektora poliedra

Pokazali smo, da svakom omeđenom i orijentiranom dijelu ravnine možemo dodijeliti jedan vektor, kojemu je apsolutna vrijednost jednaka vrijednosti te površine, a da se trokutu može dodijeliti polovina vektorskog produkta (vidi sl. 34).

Dokažimo stavak: Dodijelimo li svim pobočkama zatvorena poliedra vektore, koje orijentiramo prema vani, tada je zbroj tih vektora jednak nuli.



Sl. 38

Najprije pokažimo da taj stavak vrijedi za tetraedar. Neka iz jedne točke K prostora izlaze tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Spojivši pravcima krajeve tih vektora, dobijemo tetraedar $KABC$ (sl. 38), pri čemu je $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, a $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$.

Sada dodijelimo svakoj pobočki tetraedra vektor, koji je okomit na toj pobočki, a usmjeren je u prostor izvan tijela tetraedra.

Kako svakom trokutu odgovara polovina vektorskog produkta, dodijelili smo na taj način pobočkama tetraedra slijedeće vektore:

pobočki KAB vektor $\frac{1}{2}(\vec{b} \times \vec{a})$

„ KAC „ $\frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{c})$

pobočki KBC vektor $\frac{1}{2}(\vec{c} \times \vec{b})$

„ ABC „ $\frac{1}{2}[(\vec{c}-\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b})]$

$$\text{Zbroj vektora} = \frac{1}{2}(\vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{b} +$$

$$+ \vec{b} \times \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} + 0) = 0$$

Jasno je, da taj stavak vrijedi za svaki zatvoreni poliedar, jer svaki poliedar možemo rastaviti dijagonalnim ravninama u tetraedre, za koje vrijedi dokazani stavak. Vektori, koji pripadaju nutarnjim pobočkama tih tetraedara, ukinut će se pri zbrajanju, jer će imati istu duljinu i isti smjer, ali suprotni smisao, pa će ostati samo zbroj vektora vanjskih pobočaka poliedra, koji je jednak nuli.

Možemo poći još dalje i proširiti taj stavak na bilo koju zatvorenu zakrivljenu plohu, na pr. kuglu, aproksimirajući je poliedrom, kome su pobočni dijelovi tangencijalne ravnine kugle. Ako broj tih pobočaka teži u beskonačnost, težit će površina svake pobočke nuli, pa zbroj vektora $d\vec{S}$, koji odgovara tim pobočkama, prelazi u integral uzet po čitavoj površini S zatvorene plohe, pa je

$$\int_S d\vec{S} = 0 \qquad (29)$$

7. Višestruki produkti vektora

Razlikujemo više oblika produkata od tri, odnosno četiri vektora.

a) Umnožak skalarnog produkta dvaju vektora i trećeg vektora

$$(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c}$$

Kako je $(\vec{a}\,\vec{b})$ skalar, taj višestruki produkt triju vektora predočuje vektor, koji ima smjer vektora $\vec{c}$, duljinu $a \cdot b \cdot \cos\varphi \cdot c$ i smisao vektora $\vec{c}$, ako je $(\vec{a}\,\vec{b}) > 0$, odnosno protivni smisao za $(\vec{a}\,\vec{b}) < 0$.

b) Trostruki skalarni produkt. Uvjet komplanarnosti triju vektora

Pod trostrukim skalarnim produktom razumije se skalarni produkt vektorskog produkta dvaju vektora i trećeg vektora, t. j. izraz oblika

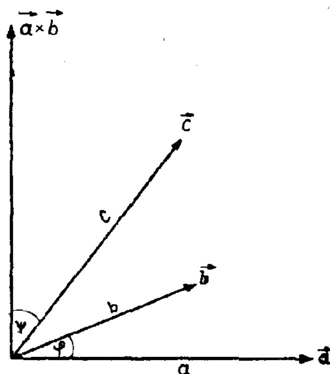
$$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = \text{skalar}$$

Prema (11) i obzirom na sliku 39 imamo:

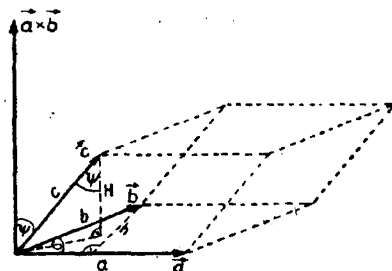
$$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}|\, c \cdot \cos\psi = \text{prema (20)} = a \cdot b \cdot \sin\varphi \cdot c \cdot \cos\psi \qquad (30)$$

Tvrdimo, da je trostruki skalarni produkt numerički jednak obujmu paralelopipeda, kojemu su bridovi vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Iz slike 40 slijedi:



Sl. 39



Sl. 40

Obujam paralelopipeda $V = B \cdot H = a \cdot h \cdot H = a \cdot b \sin \varphi \cdot c \cos \psi$, a to je baš izraz (30) za trostruki skalarni produkt.

Ako su sva tri vektora komplanarna, t. j. leže u istoj ravnini, obujam paralelopipeda, a dakle i trostruki skalarni produkt jednak je nuli. Iz istog je razloga trostruki skalarni produkt jednak nuli, ako su dva vektora, koji u nj ulaze, jednaki. Tako je na primjer

$$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{b} = 0$$

Iz toga slijedi:

Da su tri vektora komplanarna, nužno je i dovoljno da je njihov trostruki skalarni produkt jednak nuli.

Jasno je, da se obujam paralelopipeda, pa prema tome i vrijednost trostrukog skalarnog produkta ne će promijeniti, ako za osnovku paralelopipeda uzmemo koju drugu plohu toga tijela, jedino bi se mogao promijeniti predznak dobivene vrijednosti, jer, kako znamo, za vektorski produkt ne vrijedi zakon komutacije. Iz toga razloga možemo trostruki skalarni produkt pisati i u obliku

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$$

Izrazimo sada trostruki skalarni produkt triju vektora pomoću njihovih komponenata.

Dobijemo:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \{ (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + \vec{j}\,(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}\,(a_x b_y - a_y b_x) \} \; (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) =$$

$$= \text{prema (18)} = (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z$$

a kako taj izraz možemo napisati u obliku determinante, dobijemo konačno:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (31)$$

Znamo da determinanta mijenja predznak, ako zamijenimo međusobni položaj njenih dvaju redaka, pa se dakle njen predznak ne mijenja, ako načinimo redom dvije takve zamjene.

Prema tome obzirom na (31) dobijemo:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\,\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\,\vec{b} = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) \qquad (31a)$$

To znači: cikličkom permutacijom triju vektora ne mijenja se njihov trostruki skalarni produkt.

Vršimo li bilo koju drugu permutaciju vektora, trostruki skalarni produkt mijenja predznak. Na pr. $(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a})\,\vec{c}$.

Primjeri za primjenu trostrukog skalarnog produkta.

1. Izračunaj obujam paralelopipeda, kojemu su bridovi vektori $\vec{a}(1, 0, 4)$, $\vec{b}(2, -3, 5)$ i $\vec{c}(5, -2, -3)$ [u zagradama su naznačene komponente vektora].

Prema (31):

$$V = (\vec{a} \times \vec{b})\,c = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1(-10-9) - 4(-15+4) =$$
$$= 19 + 44 = 63$$

2. Dokaži da točke $A(4, 5, -1)$; $B(2, 3, 1)$; $C(-5, -6, 4)$ i $D(3, 0, -8)$ leže u jednoj ravnini.

Zadatak riješimo tako, da spojivši pravcima jednu zadanu točku s ostalima, na pr. točku A s točkama B, C i D, dodijelimo tim spojnicama vektore pa izračunamo trostruki skalarni produkt tih vektora.

Prema (8):

$$\vec{AB} = (2-4)\,\vec{i} + (3-5)\,\vec{j} + (1+1)\,\vec{k}$$
$$\vec{AB} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Na isti način dobijemo:

$$\vec{AC} = -9\vec{i} - 11\vec{j} + 5\vec{k}$$
$$\vec{AD} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$$

Prema (31):

$$(\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -9 & -11 & 5 \\ -1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -9 & -11 & 5 \\ -1 & -5 & -7 \end{vmatrix} =$$
$$= -2\,[(77+25) - (63+5) - (45-11)] =$$
$$= -2\,(102 - 68 - 34) = \underline{\underline{0}}$$

Trostruki skalarni produkt vektora jednak je nuli, dakle su vektori komplanarni, pa zadane točke A, B, C i D leže u jednoj ravnini.

3. Izračunaj obujam tetraedra, kojemu su vrhovi u točkama $A(2, -3, 5)$; $B(6, -2, 5)$; $C(4, 0, 5)$; $D(3, -2, 10)$.

Kako je obujam tetraedra (piramide) jednak $\frac{B\ H}{3}$, a osnovki B tetraedra odgovara kao trokutu samo $\frac{1}{2}$ vektorskog produkta, iznosit će obujam tetraedra $\frac{1}{6}$ trostrukog skalarnog produkta, t. j.

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{6}\,(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

Dalje postupamo kao u predašnjem zadatku:

$$\vec{AB} = 4\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

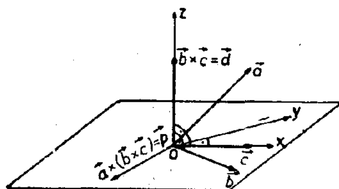
$$\vec{AD} = \vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$V_t = \frac{1}{6}\left\{\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}\right\} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\quad 5\,(12 - 2) = \frac{25}{3}$$

c) Trostruki vektorski produkt

To je vektorski produkt jednog vektora i vektorskog produkta dvaju drugih vektora, t. j. izraz oblika:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$



Sl. 41

Jasno je, da je to vektor, pa ako ga označimo s $\vec{p}$, a vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ s $\vec{d}$, dobit ćemo

$$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{d}$$

gdje je $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c}$.

Iz definicije smjera vektorskog produkta i iz slike 41. slijedi, da je

$$\vec{p} \perp \text{ na } \vec{a} \text{ i } \vec{d},$$

a kako je $\vec{d}$ okomit na ravnini vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, leži trostruki vektorski produkt $\vec{p}$ u toj ravnini.

Da izvedemo izraz za trostruki vektorski produkt, uzmimo pravokutni koordinatni sustav XYZ takav, da os X padne u smjer vektora $\vec{c}$, a os Z — u smjer vektora $\vec{d}$, pa će os Y ležati u ravnini vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (sl. 41).

Tada je

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} \qquad (b_z = 0, \text{ jer } \vec{b} \text{ leži u ravnini } XY) \qquad \textbf{(a)}$$

$$\vec{c} = c_x\vec{i} \qquad (c_y = c_z = 0, \text{ jer } \vec{c} \text{ leži u osi } X)$$

Izračunajmo vektorski produkt $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{d}$.

$$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & 0 \\ c_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-b_y c_x) = -b_y c_x \vec{k}$$

Sada traženi trostruki vektorski produkt poprima jednostavniji oblik:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & -b_y c_x \end{vmatrix} = -b_y c_x (a_y \vec{i} - a_x \vec{j}) =$$

$$= -a_y b_y c_x \vec{i} + a_x b_y c_x \vec{j}$$

Dobivenom izrazu pribrojimo i od tog izraza oduzmimo vektor $a_x b_x c_x \vec{i}$. Dobijemo:

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = -a_y b_y c_x \vec{i} + a_x b_y c_x \vec{j} + a_x b_x c_x \vec{i} - a_x b_x c_x \vec{i}$$

Odatle

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_x c_x (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) - c_x \vec{i}(a_x b_x + a_y b_y) \qquad \text{(b)}$$

Prema (a) imamo:

$$a_x \cdot c_x = \vec{a}\,\vec{c}, \text{ jer } c_y = c_z = 0$$

$$(b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = \vec{b}, \text{ jer je } b_z = 0$$

$$c_x\vec{i} = \vec{c}, \text{ jer je } c_y = c_z = 0$$

$$(a_x b_x + a_y b_y) = \vec{a}\,\vec{b}, \text{ jer je } b_z = 0$$

Uvrštenje u (b) daje traženi izraz za trostruki vektorski produkt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}) \qquad \textbf{(32)}$$

Na pr. za

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = 7\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$$

imamo:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (-4\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k})(7+12+24)-(7\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k})(-4-2-15) =$$
$$= (-4\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k})\cdot 43+(7\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k})\cdot 21 = \underline{-25\vec{i}-83\vec{j}-47\vec{k}}$$

Na isti način računa se trostruki vektorski produkt zadan u drugom obliku:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}) \qquad (32a)$$

Za naš primjer dobijemo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (-4\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k})\cdot 43-(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})\quad(-74) =$$
$$= \underline{-98\vec{i}-105\vec{j}+7\vec{k}}$$

Sada možemo izračunati skalarni produkt vektora i trostrukog vektorskog produkta:

$$\vec{a}[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] = \text{prema (32)} = \vec{a}[\vec{c}(\vec{b}\,\vec{d})-\vec{d}(\vec{b}\,\vec{c})] =$$
$$= (\vec{a}\,\vec{c})(\vec{b}\,\vec{d})-(\vec{a}\,\vec{d})(\vec{b}\,\vec{c}) = \text{skalar}$$

$$\vec{a}[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] = (\vec{a}\,\vec{c})(\vec{b}\,\vec{d})-(\vec{a}\,\vec{d})(\vec{b}\,\vec{c}) \qquad (32b)$$

d) Četverostruki skalarni produkt

To je skalarni produkt dvaju vektorskih produkata, t. j. izraz oblika:

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = \text{skalar}$$

Označivši $\vec{a}\times\vec{b}$ s $\vec{p}$, dobijemo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{p}(\vec{c}\times\vec{d}) = \text{prema (31a)} = -\vec{c}(\vec{p}\times\vec{d}) =$$
$$= -\vec{c}\{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{d}\} = +\vec{c}\{\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})\} = \text{prema (32)} =$$
$$= \vec{c}\{\vec{a}(\vec{d}\,\vec{b})-\vec{b}(\vec{d}\,\vec{a})\} = (\vec{c}\,\vec{a})(\vec{d}\,\vec{b})-(\vec{c}\,\vec{b})(\vec{d}\,\vec{a})$$

ili

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\,\vec{c})(\vec{b}\,\vec{d})-(\vec{b}\,\vec{c})(\vec{a}\,\vec{d}) = \begin{vmatrix}(\vec{a}\,\vec{c}) & (\vec{b}\,\vec{c})\\ (\vec{a}\,\vec{d}) & (\vec{b}\,\vec{d})\end{vmatrix} \qquad (33)$$

a to nam je već poznata formula (32b). Prema tome

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] \qquad (33a)$$

Na pr. za

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{c} = 7\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\vec{d} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$$

dobijemo prema (33)

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (7 + 12 + 24)(-8 + 5 - 5) - (-28 - 6 - 40)\ (2 - 10 + 3)$$
$$= -43 \cdot 8 - 74 \cdot 5 = \underline{-714}$$

e) Četverostruki vektorski produkt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \text{označimo } (\vec{a} \times \vec{b}) \text{ s } \vec{e} = \vec{e} \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \text{prema (32)}$$
$$= \vec{c}(\vec{e}\,\vec{d}) - \vec{d}(\vec{e}\,\vec{c}) = \text{ uvrstimo } (\vec{a} \times \vec{b}) \text{ mjesto } \vec{e} = \vec{c}[(\vec{a} \times \vec{b})\vec{d}] -$$
$$- \vec{d}[(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}] = \text{ prema (31a) } = \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) \tag{34}$$

Za četverostruki vektorski produkt možemo dobiti i drugi izraz, ako označimo

$$\vec{c} \times \vec{d} = \vec{f}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{f} = \text{prema (32a)} = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{f}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{f}) =$$
$$= \vec{b}[\vec{a}(\vec{c} \times \vec{d})] - \vec{a}[\vec{b}(\vec{c} \times \vec{d})] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}) \tag{34a}$$

Izjednačimo li desne strane formula (34) i (34a), dobijemo:

$$\vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})$$

Prvi član lijeve strane predočuje vektor u smjeru $\vec{c}$, drugi član — vektor u smjeru $\vec{d}$, prvi član desne strane — vektor u smjeru $\vec{b}$, a posljednji član — vektor u smjeru $\vec{a}$.

z te jednakosti možemo izračunati jedan od tih vektora, na pr. $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \frac{(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d})}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})}\vec{a} + \frac{-(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d})}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})}\vec{b} + \frac{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d})}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})}\vec{c}$$

Iz tog izraza vidimo, da je vektor $\vec{d}$ rastavljen u tri komponente u smjeru vektora: $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Primjer.

Izračunaj četverostruki vektorski produkt za vektore navedene u posljednjem primjeru za četverostruki skalarni produkt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \text{prema (34a)} =$$

$$= (-4\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} - (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \begin{vmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 7 & -6 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}) \cdot 77 - (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})(-42) = \underline{-266\vec{i} - 7\vec{j} - 259\vec{k}}$$

Četverostruki vektorski produkt može biti zadan i u drugim oblicima:

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = \text{prema (32)} = \vec{a} \times [\vec{c}(\vec{b}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{b}\vec{c})] =$$

$$= (\vec{b}\vec{d})(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b}\vec{c})(\vec{a} \times \vec{d})$$

$$\vec{a} \times [(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{d}] = \text{prema (32 a)} = \vec{a} \times [\vec{c}(\vec{b}\vec{d}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{d})] =$$

$$= (\vec{b}\vec{d})(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{c}\vec{d})(\vec{a} \times \vec{b})$$

Navedene formule za višestruke produkte imaju veliko značenje, jer daju mogućnost svesti složene izraze vektorske algebre na jednostavne osnovne izraze, koji se lako rješavaju i računaju.

8. Derivacija vektora po parametru. Primjene u mehanici

Upoznavši glavna pravila vektorske algebre, možemo lako shvatiti osnove vektorske analize. Do sada smo proučavali vektore konstantne duljine, smjera i smisla. Međutim, čest je slučaj da zadani vektor $\vec{a}$ nije konstantan, nego da ovisi o nekom parametru t, na pr. o vremenu, t. j. $\vec{a}$ je neprekinuta funkcija parametra t: $\vec{a}(t)$.

Budući da se s promjenom parametra t mijenjaju i komponente a_x, i a_y i a_z vektora $\vec{a}(t)$, one su također funkcije od t, pa je

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k} \qquad \text{(a)}$$

Dobije li parametar t prirast Δt, promijenit će se i vektor $\vec{a}(t)$ za $\Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$, pa derivaciju vektora $\vec{a}$ po parametru t možemo definirati

slično derivaciji skalarne funkcije, t. j. kao limes kvocijenta diferencija $\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$, kad $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Vidi sl. 42.

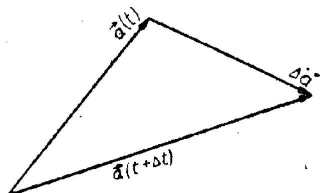
Pravila za derivaciju zbroja i produkata vektora također su ista kao i za skalarne funkcije, samo pri deriviranju vektorskog produkta treba paziti na redoslijed množitelja.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(c \cdot \vec{a}) = c \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \qquad (35)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} - \vec{b} \times \frac{d\vec{a}}{dt}$$



Sl. 42

Iz pravila za deriviranje zbroja vektora slijedi, da derivaciju vektora $\vec{a}'(t)$, t. j. vektor $\frac{d\vec{a}}{dt}$, možemo prema (a) pisati u obliku:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}$$

Spomenimo još derivaciju jediničnog vektora $\vec{a}_0(t)$, t. j. vektora, koji ima stalnu duljinu $|\vec{a}_0(t)| = 1$, ali promjenljiv smjer, jer je i jedinični vektor $\vec{a}_0(t)$ funkcija parametra t.

Znamo, da je skalarni kvadrat vektora jednak kvadratu njegove duljine, t. j

$$\vec{a}_0^{\,2} = a_0^2 = 1$$

Deriviranje daje:

$$2\left(\vec{a}_0 \frac{d\vec{a}_0}{dt}\right) = 0$$

ili

$$\vec{a}_0 \frac{d\vec{a}_0}{dt} = 0$$

Skalarni produkt dvaju vektora jednak je nuli, dakle su vektori međusobno okomiti, t. j.

$$\frac{d\vec{a_0}}{dt} \perp \vec{a_0}.$$

Vektor, koji predočuje derivaciju jediničnog vektora ili općenito svakog vektora konstantne duljine, okomit je na tom vektoru.

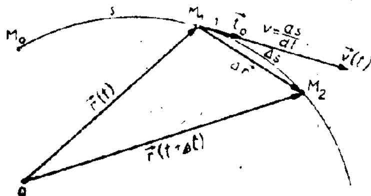
Geometrijski je taj stavak posve jasan: krajnja točka vektora stalne duljine opisuje pri promjeni parametra t kuglinu plohu; vektor $\frac{d\vec{a}}{dt}$ ima dakle smjer tangente na kuglu, pa je okomit na tom vektoru.

Kao primjere vektora, koji ovise o parametru, i to o vremenu t, navedimo vektore brzine i ubrzanja.

Neka se točka M giblje po krivulji i neka se u času t nalazi u položaju M_1, a u času $(t + \Delta t)$ u položaju M_2 (sl. 43).

Položaj točke na krivocrtnoj stazi posve je određen, ako odaberemo čvrstu nultočku O i zadamo radijvektor $\vec{r}$ iz O prema toj točki. Ako je poznat radijvektor $\vec{r}$ kao funkcija vremena t, gibanje točke je time posve određeno. Položaj točke može se odrediti i tako, da se staza gibanja utvrdi geometrijskim putem, pa se put s, što ga je točka prevalila od početne točke M_0 krivulje, prikaže kao funkcija vremena t:

$$s = f(t)$$



Sl. 43

Neka točkama M_1 i M_2 odgovaraju radijvektori položaja $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}(t + \Delta t)$, pa je

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

(vidi sl. 43).

Brzina točke M u času t je vektor $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, gdje je $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ srednja brzina za vrijeme Δt.

Vektor brzine $\vec{v}(t)$ ima smjer tangente na stazu gibanja točke, pa označimo li s Δs luk M_1M_2 krivulje, a s $\vec{t_0}$ jedinični vektor u smjeru tangente, možemo vektor brzine prikazati u obliku

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \vec{t_0} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{t_0} = v \cdot \vec{t_0} \qquad \textbf{(a)}$$

Tu je $\frac{ds}{dt} = v(t) = v$ duljina vektora brzine $\vec{v}(t)$ u času t (vidi sl. 43)

Deriviramo li vektor brzine $\vec{v}(t)$ po vremenu t, dobit ćemo ubrzanje $\vec{a}(t)$ u točki M_1

Prema (a) i obzirom na (35) dobijemo:

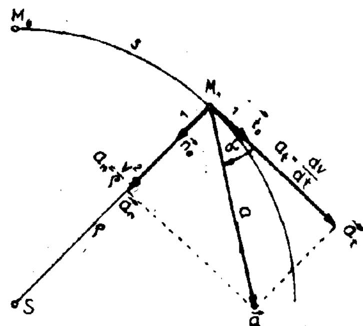
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{t}_0) = v\,\frac{d\vec{t}_0}{dt} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t}_0$$

Uzmimo sada u obzir. da je jedinični vektor tangente $\vec{t}_0$ funkcija luka s staze, a da je s funkcija vremena t.

Imamo: $\frac{d\vec{t}_0}{dt} = \frac{d\vec{t}_0}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{t}_0}{ds}$

Uvrštenje u gornju jednadžbu daje:

$$\vec{a}(t) = v^2 \frac{d\vec{t}_0}{ds} + \frac{dv}{dt}\vec{t}_0 \qquad \text{(b)}$$



Sl. 44

Time smo vektor ubrzanja $\vec{a}(t)$ u točki M_1 rastavili u dvije komponente: prvi član $v^2 \frac{d\vec{t}_0}{ds}$ predočuje normalnu komponentu $\vec{a}_n(t)$ akceleracije, jer je derivacija jediničnog vektora $\vec{t}_0$ okomita na tom vektoru, pa ima dakle smjer normale na stazu u točki M_1, dok drugi član $\frac{dv}{dt} \cdot \vec{t}_0$ predočuje tangencijalnu komponentu $\vec{a}_t(t)$ akceleracije, jer ima smjer vektora $\vec{t}_0$, t. j. smjer tangente (sl. 44).

Dakle $$\vec{a}_n(t) = v^2 \frac{d\vec{t}_0}{ds} = v^2 \left| \frac{d\vec{t}_0}{ds} \right| \vec{n}_0$$

gdje je $\vec{n}_0$ jedinični vektor normale na stazu gibanja.

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt}\vec{t}_0$$

gdje je $\vec{t}_0$ jedinični vektor tangente na stazu.

Označimo li sa S središte zakrivljenosti krivulje gibanja u točki M_1, a s ρ pripadni polumjer zakrivljenosti SM_1 (vidi sl. 44) i uzmemo li u obzir, da je $|\vec{dt_0}| = d\varphi$ = središnji kut, koji odgovara luku ds, tada je

$$ds = \rho \cdot d\varphi = \rho |\vec{dt_0}|$$

Uvrštenje tog izraza za ds u izraz za $\vec{a_n}$ daje

$$a_n = v^2 \frac{|\vec{dt_0}|}{ds} \vec{n_0} = v^2 \frac{|\vec{dt_0}|}{\rho |\vec{dt_0}|} \vec{n_0}$$

ili

$$\vec{a_n} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n_0}$$

Time smo za ubrzanje gibanja točke M_1 u času t dobili konačni izraz.

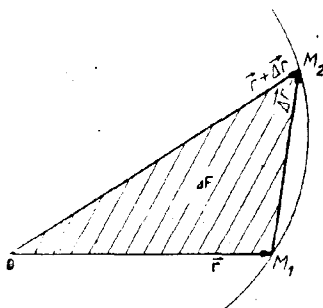
$$\vec{a}(t) = \vec{a_n}(t) + \vec{a_t}(t) = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n_0} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t_0}$$

pri čemu su duljina i smjer vektora ubrzanja određeni izrazima

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{a_n}{a_t}$$

(vidi sl. 44).



Sl. 45

Izvedimo kao drugi primjer plošni stavak za centralno gibanje, t. j. za gibanje, kod kojega ubrzanje pomične točke M ima smjer, koji prolazi kroz čvrstu točku 0 (sl. 45).

Neka se u času t nalazi točka M u položaju M_1, kojem odgovara radijvektor $\vec{r}(t)$, a u času $(t + \Delta t)$ u položaju M_2, kojem odgovara radijvektor $(\vec{r} + \vec{\Delta r})$. Prema tome za vrijeme Δt radijvektor $\vec{r}$ pokrio je površinu ΔF (sl. 45).

Pretpostavivši da površina ΔF ima približno oblik trokuta, dodijelimo joj vektor $\vec{\Delta F}$, koji je, kako znamo, jednak polovini vektorskog produkta vektora $\vec{r}$ i $\vec{r} + \vec{\Delta r}$:

$$\vec{\Delta F} = \frac{1}{2}\{\vec{r} \times (\vec{r} + \vec{\Delta r})\}$$

ili ako izvršimo množenje prema (26a)

$$\Delta\vec{F} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{r} + \vec{r} \times \Delta\vec{r})$$

Kako je prema (24) prvi član desne strane jednak nuli, dobijemo

$$\Delta\vec{F} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \Delta\vec{r})$$

Podijelivši tu jednakost s Δt i pustivši da $\Delta t \to 0$, dobijemo na granici:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Taj izraz diferencirajmo po t, pa prema (35) imamo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Oba vektorska produkta na desnoj strani te jednakosti jednaka su nuli. Prvi produkt jednak je nuli, jer pri centralnom gibanju usmjereno je ubrzanje $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ prema čvrstoj točki O, pa ima smjer radijvektora $\vec{r}$, a, kako znamo, vektorski produkt kolinearnih vektora jednak je nuli. Drugi vektorski produkt jednak je nuli kao vektorski kvadrat.

Imamo dakle

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right) = 0$$

a odatle

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = C_1$$

Ponovno integriranje daje

$$F = C_1 t + C_2$$

Time je plošni stavak za centralno gibanje dokazan: radijvektor pokriva u jednakim vremenskim razmacima jednake površine. Najpoznatija primjena plošnog stavka je drugi Keplerov zakon: Radijvektor povučen od planeta prema Suncu opisuje u istim vremenskim razmacima iste površine.

1. Općenito

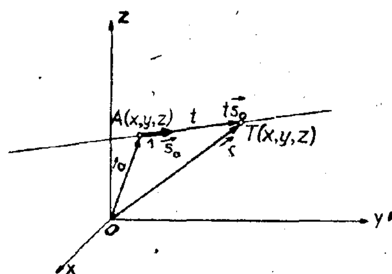
Upotrijebimo naše znanje vektorske algebre, da tim najjednostavnijim putem dođemo do osnovnih pojmova analitičke geometrije u prostoru. Uzet ćemo redom pravac, dalje dva pravca, ravninu, dvije ravnine, i konačno, ravninu i pravac. Kasnije ćemo proučiti glavne likove ploha drugog reda. Kako ćemo vidjeti, rješavanje tih problema svodi se zapravo na analitičko rješavanje zadataka iz deskriptivne geometrije: ono što deskriptivna geometrija rješava crtanjem, rješavat ćemo analitički, pa ćemo mnoge probleme svladati tek nakon njihova predočivanja u prostoru i prostornog rješenja.

2. Pravac

a) Jednadžbe pravca kroz jednu zadanu točku $A(x_1, y_1, z_1)$. (Parametarski i kanonski oblik)

Kako zadana točka $A(x_1, y_1, z_1)$ pravca određuje samo njegov položaj u prostoru, moramo mu dati smjer i smisao da bude posve određen. U tu svrhu dodijelimo pravcu jedinični vektor $\vec{s}_0$, kojemu su komponente, kako znamo, kosinusi njegova smjera:

$$\vec{s}_0 \begin{cases} \cos\alpha = a' \\ \cos\beta = b' \\ \cos\gamma = c' \end{cases} \qquad \text{(a)}$$



Sl. 46

Vidi sl. 46.

Sada je pravac posve određen, pa možemo napisati njegovu jednadžbu, t. j. napisati relaciju, koja veže koordinate bilo koje točke $T(x, y, z)$ pravca s onim, čime je pravac određen.

Dodijelimo zadanoj točki $A(x_1, y_1, z_1)$ radijvektor $\vec{r} \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases}$, a po volji uzetoj točki $T(x, y, z)$ radijvektor $\vec{a} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

Udaljenost točke T od zadane točke A označimo s t. Kako je točka T odabrana na pravcu po volji, t je promjenljiva veličina ili parametar, koji moramo mijenjati od $-\infty$ do $+\infty$, da dobijemo sve točke pravca. Na pr. za $t = 0$ dobijemo zadanu točku A.

Time smo dobili još jedan vektor $\overrightarrow{AT} = t \cdot \vec{s}_0$, kojemu su prema (a) komponente

$$\overrightarrow{AT} \begin{cases} t\,a' \\ t\,b' \\ t\,c' \end{cases}$$

Iz slike vidimo, da je

$$\vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{s_0} \tag{36}$$

a to je jednadžba zadanog pravca u vektorskom obliku.

Vidimo da pravac ovisi o jednom parametru t, u čemu se očituje jednodimenzionalnost pravca.

Prelazimo na skalarne komponente svih vektora

Obzirom na gore navedene komponente vektora $\vec{r}$, $\vec{a}$ i $\vec{s_0}$, dobijemo prema (36)

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a't \\ y &= y_1 + b't \\ z &= z_1 + c't \end{aligned} \tag{37}$$

To je jednadžba pravca u parametarskom obliku.

t je parametar, koji se mijenja od $-\infty$ do $+\infty$, da se dobiju sve točke zadanog pravca.

x_1, y_1 i z_1 su koordinate zadane točke pravca.

a', b' i c' su kosinusi smjera pravca.

Kako ćemo doskora vidjeti, kosinuse smjera pravca možemo zamijeniti koeficijentima smjera pravca a, b i c

Da se dobije jednadžba zadanog pravca u općem obliku, treba iz jednadžbe (37) ukloniti parametar t. U tu svrhu računamo iz (37)

$$t = \frac{x - x_1}{a'}$$

$$t = \frac{y - y_1}{b'}$$

$$t = \frac{z - z_1}{c'}$$

Izjednačenje desnih strana tih jednakosti daje

$$\frac{x - x_1}{a'} = \frac{y - y_1}{b'} = \frac{z - z_1}{c'}.$$

a', b' i c' su kosinusi smjera pravca, koji su obično izraženi u decimalnim razlomcima. Da dobijemo u nazivnicima cijele brojeve, pomnožimo sve nazivnike posljednje jednakosti s nekim množiteljem λ (na pr. 100, 1000 i t. d.)

Dobijemo:

$$\frac{x - x_1}{a'\lambda} = \frac{y - y_1}{b'\lambda} = \frac{z - z_1}{c'\lambda}$$

Izrazi

$$\begin{aligned} a'\lambda &= a \\ b'\lambda &= b \\ c'\lambda &= c \end{aligned} \tag{a}$$

zovu se **koeficijenti smjera pravca**. Oni se tako zovu, jer su razmjerni s kosinusima smjera pravca

Jednadžba pravca kroz jednu zadanu točku $A(x_1, y_1, z_1)$ prima sada svoj konačni oblik:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{38}$$

Taj oblik jednadžbe pravca zove se **kanonski**, jer na taj oblik, kako ćemo to kasnije vidjeti, možemo svesti svaki drugi oblik jednadžbe pravca. Iz kanonskog oblika vide se neposredno koordinate jedne točke, kojom taj pravac prolazi, a također njegovi koeficijenti smjera.

Nastaje pitanje, kako ćemo iz koeficijenata smjera pravca odrediti njegove kosinuse smjera, a time i kutove α, β i γ, što ih zadani pravac zatvara s koordinatnim osima X, Y i Z.

Da na to pitanje odgovorimo, izračunajmo iz jednadžbi (a) kosinuse smjera pravca, t. j. $a' = \cos\alpha$, $b' = \cos\beta$ i $c' = \cos\gamma$.

Dobijemo:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\lambda}$$
$$\cos\beta = \frac{b}{\lambda} \tag{b}$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\lambda}$$

Kvadriranje i zbrajanje tih jednakosti daje

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\lambda^2}$$

ili prema (5)

$$1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\lambda^2}$$

a odatle

$$\lambda = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Uvrštenje u (b) daje **tražene vrijednosti kosinusa smjera pravca izražene pomoću koeficijenata smjera toga pravca**:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{39}$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Kako već znamo, promjena predznaka ispred drugog korijena znači promjenu smisla pravca, a ne promjenu njegova smjera.

Primjer

Odredi kutove α, β i γ, što ih pravac

$$\frac{x-5}{-3}=\frac{y}{5}=\frac{z+4}{-2}$$

zatvara s koordinatnim osima X, Y i Z.

Uzevši u obzir, da je $a=-3$, $b=5$ i $c=-2$ računajmo prema (39) pomoću logaritamskog računala

$$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{9+25+4}}=\frac{-3}{\sqrt{38}}=-\frac{3}{6{,}16}=-0{,}487$$

$$\cos\beta=\frac{5}{6{,}16}=0{,}812$$

$$\cos\gamma=-\frac{2}{6{,}16}=-0{,}325$$

Pokus prema (5) : $0{,}237+0{,}659+0{,}106=1{,}002\doteq 1$

$$\alpha=180°-60°50'=\underline{119°10'}$$
$$\beta=\underline{35°40'}$$
$$\gamma=180°-71°00'=\underline{109°00'}$$

b) Pravac kroz jednu zadanu točku predočen svojim ortogonalnim projekcijama u dvije koordinatne ravnine

Iz jednadžbe (38) uzmimo jednakost

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}$$

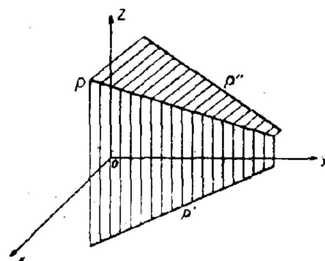
pa izračunajmo odatle x:

$$x=\frac{a}{b}y-\left(\frac{a}{b}y_1-x_1\right)$$

ili

$$x=\frac{a}{b}y+d_1$$

gdje je $d_1=-\left(\frac{a}{b}y_1-x_1\right)$



Sl. 47

Taj izraz predočuje pravac p' u ravnini XY, kojemu je $\frac{a}{b}$ gradijent, a $d_1=-\left(\frac{a}{b}y_1-x_1\right)$ odsječak na osi X. Budući da promjenljiva z u taj izraz ne ulazi, z je bilo koji, pa taj izraz predočuje prostorno ravninu, koja je okomita na ravninu XY i kojoj je pravac p' trag u toj ravnini. (Vidi sl. 47).

Izračunamo li iz druge jednakosti formule (38)

$$\frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

promjenljivu y

$$y = \frac{b}{c} z - \left(\frac{b}{c} z_1 - y_1\right)$$

ili

$$y = \frac{b}{c} z + d_2$$

gdje je

$$d_2 = -\left(\frac{b}{c} z_1 - y_1\right)$$

dobit ćemo pravac p'' u ravnini YZ, odnosno ravninu, koja je okomita na ravnini YZ i kojoj je pravac p'' trag u toj ravnini.

Te dvije ravnine, koje su okomite na koordinatnim ravninama XY i YZ, sijeku se u zadanom pravcu p, koji prolazi zadanom točkom $A(x_1, y_1, z_1)$. To znači: pomoću jednadžbi

$$x = \frac{a}{b} y + d_1$$
$$y = \frac{b}{c} z + d_2 \qquad (40)$$

zadan je pravac p u prostoru svojim ortogonalnim projekcijama p i p u dvim koordinatnim ravninama (u deskriptivnoj geometriji označuju se te ravnine s π_1 i π_2)

Jasno je, da kombinirajući na drugi način jednakosti iz jednadžbe pravca (38), možemo pravac zadati njegovim projekcijama na druge dvije koordinatne ravnine, na pr. na ravnine YZ i XZ (na π_2 i π_3).

Primjer.

Napiši jednadžbu pravca

$$x = 2y - 3$$
$$y = -5z + 8$$

u kanonskom i parametarskom obliku.

Iz zadanih jednadžbi vidimo, da je pravac zadan svojim ortogonalnim projekcijama na koordinatne ravnine XY i YZ

Iz prve jednadžbe računamo y.

$$y = \frac{x + 3}{2}$$

a drugu jednadžbu pišemo u obliku

$$y = -5\left(z - \frac{8}{5}\right) = \frac{z - \frac{8}{5}}{-\frac{1}{5}} = \frac{z - 1{,}6}{-\frac{1}{5}}$$

Tražena jednadžba pravca glasi:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1,6}{-\frac{1}{5}}$$

ili ako nazivnike pomnožimo s 5:

$$\frac{x+5}{10}=\frac{y}{5}=\frac{z-1,6}{-1}$$

Zadani pravac prolazi točkom $A(-5; 0; 1,6)$, a koeficijenti smjera su: $a = 10$, $b = 5$ i $c = -1$.

Da dobijemo jednadžbu toga pravca u parametarskom obliku, izjednačimo dobivenu jednadžbu pravca s parametrom t:

$$\frac{x+3}{10}=\frac{y}{5}=\frac{z-1,6}{-1}=t$$

Odatle slijedi tražena parametarska jednadžba pravca:

$$\begin{aligned} x &= 10t - 3 \\ y &= 5t \\ z &= -t + 1,6 \end{aligned}$$

Izračunaj za vježbu kutove, što ih taj pravac zatvara s koordinatnim osima!

c) Pravac kao presjek dviju ravnina

Znamo, da se dvije ravnine sijeku u pravcu u prostoru. Prema tome pravac je posve određen, ako su zadane dvije ravnine, koje se sijeku u tom pravcu. Kako ćemo malo kasnije vidjeti, opća jednadžba ravnine glasi $Ax + By + Cz + D = 0$, dakle je

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right| \text{ jednadžba pravca u prostoru}$$

Primjer

Jednadžbu pravca

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 5z - 6 &= 0 \\ 2x + 4y - 7z + 10 &= 0 \end{aligned}\right|$$

izrazi u kanonskom i parametarskom obliku i odredi probodišta tog pravca s koordinatnim ravninama.

Da odredimo jednadžbu zadanog pravca u kanonskom obliku, uklonimo x iz zadanih jednadžbi ravnina. U tu svrhu izračunajmo x iz prve, a zatim iz druge jednadžbe ravnine:

$$x = 3y - 5z + 6$$

$$x = -2y + \frac{7}{2}z - 5$$

Odatle

$$3y - 5z + 6 = -2y + \frac{7}{2}z - 5$$

ili

$$y = \frac{17}{10}z - \frac{11}{5} \ldots\ldots \text{ projekcija zadanog pravca na koordinatnu ravninu } YZ.$$

Sada uklonimo y iz zadanih jednadžbi ravnina:

$$y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3} z - 2$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{4} z - \frac{5}{2}$$

Odatle

$$\frac{x}{3} + \frac{5}{3} z - 2 = -\frac{x}{2} + \frac{7}{4} z - \frac{5}{2}$$

ili

$$x = \frac{z}{10} - \frac{3}{5}$$ projekcija zadanog pravca na koordinatnu ravninu XZ

Iz jednadžbe prve projekcije imamo

$$z = \frac{y + \frac{11}{5}}{\frac{17}{10}}$$

a iz jednadžbe druge projekcije slijedi

$$z = \frac{x + \frac{3}{5}}{\frac{1}{10}}$$

Jednadžba pravca u kanonskom obliku glasi

$$\frac{x + \frac{3}{5}}{\frac{1}{10}} = \frac{y + \frac{11}{5}}{\frac{17}{10}} = \frac{z}{1}$$

ili

$$\frac{x + 0{,}6}{1} = \frac{y + 2{,}2}{17} = \frac{z}{10}$$

Da odredimo probodišta toga pravca s koordinatnim ravninama prelazimo na parametarski oblik jednadžbe pravca.

Postavivši

$$\frac{x + 0{,}6}{1} = \frac{y + 2{,}2}{17} = \frac{z}{10} = t$$

dobijemo taj oblik:

1. $x = t - 0{,}6$
2. $y = 17t - 2{,}2$
3. $z = 10t$

Primijetimo, da do parametarske jednadžbe pravca možemo doći i neposredno: uzevši da je jedna od promjenljivih u zadanim jednadžbama ravnine, na pr. x, jednaka t, izrazimo i ostale dvije promjenljive kao funkcije tog parametra t.

Odredimo sada onu vrijednost parametra t, koja odgovara njegovom probodištu P_1 s ravninom XY. U tu svrhu uvrstimo u 3. jednadžbu te ravnine $z = 0$.

Dobijemo: $t_1 = 0$

Uvrštenje $t_1 = 0$ u 1. i 2. jednadžbu daje tražene koordinate probodišta P_1:

$$x_1 = -0{,}6$$
$$y_1 = -2{,}2$$

$$\underline{P_1 = (-0{,}6\ ;\ -2{,}2;\ 0)}$$

Odredimo sada probodište P_2 s ravninom YZ.
Uvrštenje u 1. $x = 0$ daje

$$t_2 = 0{,}6$$

pa iz 2. i 3. dobijemo:

$$y_2 = 17\ .\ 0{,}6 - 2{,}2 = 8$$
$$z_2 = 10\ .\ 0{,}6 = 6$$

$$\underline{P_2\,(0;\ 8;\ 6)}$$

Konačno odredimo probodište P_3 s ravninom $XZ : y = 0$. Iz 2. slijedi:

$$t_3 = \frac{2{,}2}{17} = 0{,}1294$$

$$x_3 = 0{,}1294 - 0{,}6 = -0{,}4706$$
$$z_3 = 10\ .\ 0{,}1294 = 1{,}294$$

$$\underline{P_3\,(-0{,}4706\ ;\ 0;\ 1{,}294)}$$

d) Jednadžba pravca kroz dvije zadane točke $A_1(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$.

Pravac prolazi točkom $A(x_1, y_1, z_1)$, dakle prema (38) njegova jednadžba glasi:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Pravac prolazi točkom $B(x_2, y_2, z_2)$, dakle

$$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = \frac{z_2 - z_1}{c}$$

Odatle

$$\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} = \frac{a}{c} \quad \text{i} \quad \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} = \frac{b}{c}$$

Podijelimo li sve nazivnike jednadžbi (38) s c i uvrstimo li u tako preinačenu jednadžbu gornje dvije jednakosti, dobijemo:

$$\frac{x - x_1}{\dfrac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}} = \frac{y - y_1}{\dfrac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1}} = \frac{z - z_1}{1} \Bigg| \cdot (z_2 - z_1)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (41)$$

To je jednadžba pravca kroz dvije točke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$. Koeficijenti smjera pravca jesu: $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ i $c = z_2 - z_1$.

Primjer.

Odredi najkraću udaljenost točke $T(2, 1, 3)$ od pravca, koji prolazi točkama $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 3, 4)$.

Jednadžba pravca prema (41) glasi:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1}$$

ili

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

Prelazimo na parametarski oblik:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = t$$

$$\begin{aligned} x &= t + 1 \\ y &= 2t + 1 \\ z &= 3t + 1 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Znamo formulu (9) za međusobnu udaljenost dviju točaka:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Da odredimo onu vrijednost parametra t, koja odgovara točki pravca, koja je najbliža točki $T(2, 1, 3)$, uvrstimo u (9) jednadžbe (a) i koordinate točke T, pa prema pravilu za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcije (vidi Dio I, § 15) izračunajmo $\frac{d(d)}{dt}$ ili $\frac{d(d^2)}{dt}$ i stavimo $\frac{d(d^2)}{dt} = 0$:

$$d^2 = (t + 1 - 2)^2 + (2t + 1 - 1)^2 + (3t + 1 - 3)^2$$

ili

$$d^2 = (t-1)^2 + 4t^2 + (3t-2)^2$$

$$\frac{d(d^2)}{dt} = 2(t-1) + 8t + 2(3t-2) \cdot 3$$

ili

$$\frac{d(d^2)}{dt} = 28\,t - 14$$

Stavimo $\qquad 28t - 14 = 0$

Odatle $\qquad t_0 = \frac{1}{2}$

$$\frac{d^2(d^2)}{dt^2} = 28 > 0 \rightarrow \quad d^2 \text{ ima minimum za } t_0 = \frac{1}{2}$$

Uvrštenje $t_0 = \frac{1}{2}$ u jednadžbe (a) daje koordinate one točke pravca, koja je najbliža točki T:

$$x_0 = \frac{3}{2}$$

$$y_0 = 2$$

$$z_0 = \frac{5}{2}$$

Prema (9):

$$d_{min} = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (1 - 2)^2 + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2}$$

$$d_{min} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

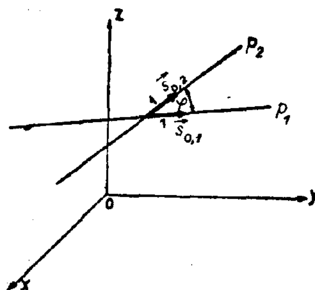
3. Dva pravca

a) Kut dvaju pravaca

Da odredimo kut φ dvaju zadanih pravaca

$$p_1 \equiv \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

$$p_2 \equiv \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$



Sl. 48

dodijelimo tim pravcima jedinične vektore

$$\vec{s}_1^{\,\circ} \begin{cases} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{cases} \quad \text{i} \quad \vec{s}_2^{\,\circ} \begin{cases} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{cases}$$

(sl. 48).

Primijetimo: ako su pravci mimosmjerni, t. j. ako se ne sijeku a nisu ni usporedni, paralelnim pomakom prenesimo jedan pravac u bilo koju točku drugog pravca.

Traženi kut φ odredimo prema formuli (19a) za kut dvaju jediničnih vektora:

$$\cos\varphi = \vec{s}_1^{\,\circ}\,\vec{s}_2^{\,\circ} = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \tag{42}$$

ili obzirom na formule (39) dobijemo:

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \tag{42a}$$

b) Uvjet okomitosti dvaju pravaca

Ako su oba pravca međusobno okomita, kut $\varphi = 90°$, $\cos 90° = 0$. Kako je razlomak jednak nuli, kad je njegov brojnik jednak nuli, dobijemo iz (42a)

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \tag{43}$$

Uvjet okomitosti dvaju pravaca

c) Uvjet paralelnosti dvaju pravaca

Ako su dva pravca međusobno paralelna, tada su jednaki kutovi, što ih ti pravci zatvaraju s koordinatnim osima, t. j.

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \text{i} \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

odnosno

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2, \quad \cos\beta_1 = \cos\beta_2 \quad \text{i} \quad \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$$

Prema tome i obzirom na (39) imamo:

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

ili

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Iste vrijednosti dobijemo za omjere $\frac{b_1}{b_2}$ i $\frac{c_1}{c_2}$, pa je

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{44}$$

Pravci su međusobno paralelni, ako su njihovi koeficijenti smjera proporcionalni ili jednaki.

Primjer.

Napiši jednadžbu pravca, koji prolazi točkom $T(2, -3, 4)$, a paralelan je s pravcem

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y+7}{5} = \frac{z}{-7}$$

Prema (38) i (44) jednadžba traženog pravca glasi

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{-7}$$

d) Sjecište dvaju pravaca

U ravnini sijeku se svaka dva pravca, koja nisu međusobno paralelna. Međutim, u prostoru ne sijeku se ne samo paralelni, nego ni mimosmjerni pravci. Stoga postavimo uvjet, kojemu moraju zadovoljavati jednadžbe dvaju prostornih pravaca, da se međusobno sijeku, t. j. da nisu mimosmjerni. Paralelne pravce lako možemo raspoznati prema (44).

Neka su zadana dva pravca u parametarskom obliku

$$\begin{aligned} x &= a_1 t_1 + x_1 \\ y &= b_1 t_1 + y_1 \\ z &= c_1 t_1 + z_1 \end{aligned} \quad \text{(a)} \qquad \begin{aligned} x &= a_2 t_2 + x_2 \\ y &= b_2 t_2 + y_2 \\ z &= c_2 t_2 + z_2 \end{aligned} \quad \text{(b)}$$

Pretpostavimo da se ti pravci sijeku u nekoj točki $S(x, y, z)$. Tada je

$$a_1t_1 + x_1 = a_2t_2 + x_2$$
$$b_1t_1 + y_1 = b_2t_2 + y_2$$
$$c_1t_1 + z_1 = c_2t_2 + z_2$$

ili

$$a_1t_1 - a_2t_2 + (x_1 - x_2) = 0$$
$$b_1t_1 - b_2t_2 + (y_1 - y_2) = 0$$
$$c_1t_1 - c_2t_2 + (z_1 - z_2) = 0$$

Uvedimo t. zv. homogene nepoznanice

$$t_1 = \frac{x}{z} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{y}{z}, \text{ gdje je } z \neq 0$$

Uvrštenje u gornje jednadžbe daje:

$$a_1x - a_2y + (x_1 - x_2)z = 0$$
$$b_1x - b_2y + (y_1 - y_2)z = 0$$
$$c_1x - c_2y + (z_1 - z_2)z = 0$$

Dobili smo tri linearne homogene jednadžbe s tri nepoznanice x, y i z. Znamo, da takav sustav ima rješenja različita od očevidnih, ako je determinanta sustava jednaka nuli.

Prema tome traženi uvjet glasi:

$$-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x_1 - x_2 \\ b_1 & b_2 & y_1 - y_2 \\ c_1 & c_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0$$

ili ako promijenimo međusobni položaj prvog i trećeg stupca, a zatim zaokrenemo determinantu za 180° oko dijagonalnih članova dobit ćemo:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(44a)}$$

To je uvjet, da se zadani pravci sijeku u jednoj točki, t. j. da nisu mimosmjerni.

Ako je taj uvjet ispunjen, iz bilo koje dvije jednadžbe sustava (a) i (b) računamo one vrijednosti parametra t_1 i t_2, koje odgovaraju traženom sjecištu zadanih pravaca, pa jednadžbe (a) ili (b) dat će koordinate (x_0, y_0, z_0) toga sjecišta

Primjeri.

1. Dokaži da pravci

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{4}$$

nisu mimosmjerni i odredi njihovo sjecište.

Prema (44a):

$$\begin{vmatrix} -2+3 & -4-8 & 4+5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -12 & 9 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(8-5) + 12(12+2) + 9(-15-4) = 3 + 168 - 171 = \underline{0}$$

Pravci se sijeku!

Prelazimo na parametarski oblik jednadžbi pravaca:

$$\text{I.}\quad x = 3t_1 - 2 \qquad \text{II.}\quad x = 2t_2 - 3$$
$$y = 2t_1 - 4 \qquad y = -5t_2 + 8$$
$$z = -t_1 + 4 \qquad z = 4t_2 - 5$$

Izjednačimo:
$$3t_1 - 2 = 2t_2 - 3$$
$$2t_1 - 4 = -5t_2 + 8$$

ili
$$3t_1 - 2t_2 = -1$$
$$2t_1 + 5t_2 = 12$$

Odatle:
$$t_1 = 1\,;\, t_2 = 2$$

Uvrštenje u I. ili II. daje koordinate traženog sjecišta pravaca:

$$\underline{x_0 = 1} \quad , \quad \underline{y_0 = -2} \quad , \quad \underline{z_0 = 3}$$

2. Odredi jednadžbu pravca, koji prolazi točkom (2, 2, —2) i siječe zadane pravce

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1} \quad ; \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{2}$$

Jednadžba traženog pravca:

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z+2}{c} \qquad \text{(a)}$$

$$a = ? \qquad b = ? \qquad c = ?$$

Taj pravac siječe prvi, a također i drugi zadani pravac, dakle prema (44a)

$$\begin{vmatrix} 2-3 & 2+1 & -2-2 \\ a & b & c \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

i

$$\begin{vmatrix} 2+2 & 2-1 & -2+3 \\ a & b & c \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Odatle računamo a, b i c.

$$-a(-3+12) + b(1+8) - c(-3-6) = 0 \,) \;\Big|\; : 9c$$
$$-a(2+2) + b(8-3) - c(-8-3) = 0 \;\Big|\; : c$$

$$-\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 = 0$$

$$-4\frac{a}{c} + 5\frac{b}{c} + 11 = 0$$

Odatle: $\frac{a}{c} = -6 \quad ; \quad \frac{b}{c} = -7$ (b)

Podijelimo li nazivnike jednadžbe (a) s c i uvrstimo li vrijednost (b), dobit ćemo:

$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+2}{1}$$

ili

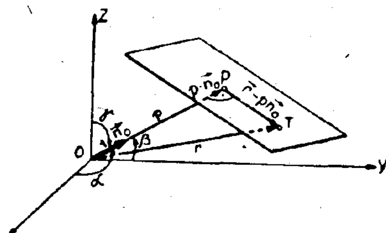
$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+2}{-1}$$

Primjer za određivanje najkraće udaljenosti dvaju mimosmjernih pravaca vidi dalje str. 93 i § 4, 15.

4. Ravnina

a) Normalni ili Hesseov oblik jednadžbe ravnine

Ravnina u prostoru posve je određena, ako je zadana duljina p okomice ili normale povučene iz ishodišta O koordinatnog sustava na ravninu i kutovi α, β i γ, što ih ta normala zatvara s koordinatnim osima (vidi sl. 49).



Sl. 49

Da napišemo jednadžbu te ravnine, odaberimo u ravnini bilo koju točku $T(x, y, z)$, kojoj dodijelimo radijvektor $\vec{r} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$, a normali $p = OP$ dodijelimo jedinični vektor $\vec{n}_0 \begin{cases} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{cases}$, pa je $\vec{OP} = p \cdot \vec{n}_0$. Time smo dobili još jedan vektor i to

$$\vec{PT} = \vec{r} - p\vec{n}_0$$

Kako vektor $\vec{PT}$ leži u zadanoj ravnini, a vektor $\vec{OP}$ je okomit na toj ravnini, bit će $\vec{PT} \perp \vec{OP}$, pa je njihov skalarni produkt jednak nuli, t. j.

$$p \cdot \vec{n}_0 (\vec{r} - p\vec{n}_0) = 0$$

ili

$$p(\vec{n}_0 \vec{r}) - p^2 \vec{n}^2 = 0$$

Podijelivši tu jednadžbu s p i uzevši u obzir da je prema (15) $\vec{n}_0^2 = 1$, dobijemo traženu jednadžbu ravnine u normalnom obliku izraženom vektorski:

$$\vec{n}_0 \vec{r} = p$$

Prelazimo na skalarne komponente vektora. Prema (18) imamo uzevši u obzir gore navedene komponente vektora $\vec{n}_0$ i $\vec{r}$:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \tag{45}$$

To je jednadžba ravnine u normalnom ili Hesseovom obliku.

b) Opći oblik jednadžbe ravnine

Iz jednadžbe ravnine u normalnom obliku vidimo, da je ta jednadžba linearna u x, y i z i da su koeficijenti tih promjenljivih, a također i apsolutni član p jednadžbe, konačni određeni brojevi. Iz toga zaključujemo, da svaka linearna relacija u x, y i z predočuje ravninu u prostoru, t. j.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{46}$$

opća jednadžba ravnine.

(Slično predočuje relacija linearna u x i y pravac u ravnini XY).

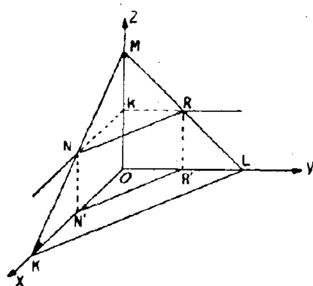
Da se u to uvjerimo, odredimo presjeke geometrijskog lika predočenog jednadžbom

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

s koordinatnim ravninama.

Presjek s ravninom $XY : z = 0$

Uvrštenje daje: $Ax + By + D = 0$, a to je pravac KL u ravnini XY (vidi sl. 50).



Sl. 50

Na isti način dobijemo:

presjek s ravninom YZ: $x = 0$.

$$By + Cz + D = 0 \text{ — pravac } LM \text{ u ravnini } YZ$$

Presjek s ravninom XZ $y = 0$

$$Ax + Cz + D = 0 \text{ — pravac } KM \text{ u ravnini } XZ.$$

Presjecimo konačno geometrijski lik zadan jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$ ravninom $z = k$ (konstanta), t. j. ravninom, koja je paralelna s ravninom XY i udaljenom od nje za k.

Dobijemo

$$Ax + By + (Ck + D) = 0$$

Opet smo dobili pravac u ravnini XY i to pravac $N'R'$, koji predočuje projekciju presječnice NR u ravninu XY (vidi sl. 50).

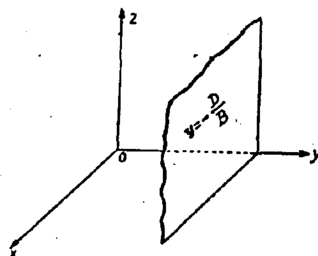
Vidimo, da je svaki presjek pravac, dakle jednadžba

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

predočuje ravninu u prostoru.

Ako u opću jednadžbu ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



Sl. 51

ne ulazi član sa z, t. j $C = 0$, tada jednadžba $Ax + By + D = 0$ predočuje, kako već znamo, ravninu paralelnu s osi Z, odnosno okomitu na ravnini XY, pri čemu je pravac $Ax + By + D = 0$ trag te ravnine.

Analogno predočuju jednadžbe

$$Ax + Cz + D = 0$$
$$By + Cz + D = 0$$

ravnine, koje su paralelne s osi Y, odnosno X, dakle su okomite na ravnini XZ, odnosno YZ.

Ako u općoj jednadžbi ravnine nema članova s dvije promjenljive, na pr. $A = 0$ i $C = 0$, jednadžba

$$By + D = 0 \quad \text{ili} \quad y = -\frac{D}{B}$$

predočuje ravninu, koja je paralelna s koordinatnim osima X i Z, pa je paralelna s ravninom XZ (sl. 51).

Slično su ravnine

$$Ax + D = 0$$
i
$$Cz + D = 0$$

paralelne s ravninom YZ, odnosno XY.

Općenito može se kazati: linearna jednadžba u x, y i z, u kojoj nema jedne ili dvije od tih promjenljivih, paralelna je s onim koordinatnim osima, koje odgovaraju izostavljenim promjenljivim.

Konačno, ako je $D = 0$, jednadžba prima oblik

$$Ax + By + Cz = 0$$

pa predočuje ravninu, koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava, jer je zadovoljavaju koordinate (0, 0, 0) ishodišta O.

c) Prelaz od opće jednadžbe ravnine na normalni oblik

Neka ista ravnina ima dvije jednadžbe

opću:
$$Ax + By + Cz + D = 0$$
i normalnu
$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

Radi toga što te jednadžbe predočuju istu ravninu, slijedi da koeficijenti tih jednadžbi moraju biti proporcionalni (jednaki samo u posebnom slučaju). Stoga množimo sve članove prve jednadžbe s faktorom proporcionaliteta λ, koji nam zasad još nije poznat:

$$A\lambda x + B\lambda y + C\lambda z + D\lambda = 0$$

Sada možemo izjednačiti pripadne koeficijente obiju jednadžbi:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= A\lambda \\ \cos\beta &= B\lambda \\ \cos\gamma &= C\lambda \end{aligned} \quad \text{(a)} \qquad \text{i} \qquad -p = D\lambda \qquad \text{(b)}$$

Kvadriranje i zbrajanje jednadžbi (a) daje:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \lambda^2(A^2 + B^2 + C^2)$$

ili prema (5):

$$1 = \lambda^2(A^2 + B^2 + C^2)$$

Odatle

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje (c) u (a) daje

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned} \qquad (47)$$

To su kosinusi smjera normale ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$. Uvrštenje (c) u (b) daje

$$p = \frac{D}{\mp\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Prema tome

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,z +$$

$$+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

ili
$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (47a)$$

jednadžba ravnine u normalnom obliku.

Odatle slijedi: da se izvrši prelaz od općeg oblika jednadžbe ravnine na normalni, treba jednadžbu ravnine podijeliti s $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, pri čemu se ispred korijena uzima predznak, koji je protivan predznaku od D, jer je p, kao duljina normale, bitno pozitivna veličina.

Primjer.

Prikaži u normalnom obliku jednadžbu ravnine

$$2x-y+2z+6=0$$

Kako je $A=2$, $B=-1$, $C=2$ i $D=+6$, dijelimo jednadžbe ravnine s $-\sqrt{4+1+4}=-\sqrt{9}=-3$:

$$-\frac{2}{3}x+\frac{y}{3}-\frac{2}{3}z-2=0 \qquad \ldots\ldots \text{ normalni oblik}$$

Prema tome: $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$, $p=+2$.

d) Udaljenost točke od ravnine

Traži se udaljenost d točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine

$$E\equiv x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

Zadanom točkom T_1 položimo ravninu E' paralelnu sa zadanom ravninom E. Iz slike 52 vidimo, da je $x\cos\alpha+y\cos\beta+y\cos\gamma-(p+d)=0$ jednadžba te paralelne ravnine E'.

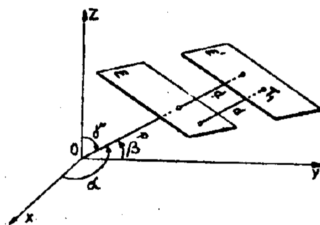
Točka $T_1(x_1, y_1, z_1)$ leži u toj ravnini E', dakle

$$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p-d=0$$

Odatle je

$$d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p \qquad (48)$$

tražena udaljenost točke od ravnine.



Sl. 52

Da se odredi udaljenost točke od ravnine, treba jednadžbu ravnine napisati u normalnom obliku, pa u taj oblik uvrstiti koordinate zadane točke.

Prema tome obzirom na (47a)

$$d=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (48a)$$

jest udaljenost točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine $Ax+By+Cz+D=0$.

Primjer.

Odredi udaljenosti točaka $T_1(3, 4, 5)$ i $T_2(3, -4, -5)$ od ravnine $6x + 4y + 3z - 12 = 0$

Prelazimo na normalni oblik prema (47a):

$$6x + 4y + 3z - 12 = 0 \mid : +\sqrt{36 + 16 + 9} = +\sqrt{61}$$

$$\frac{6x + 4y + 3z - 12}{\sqrt{61}} = 0$$

a prema (48a) dobijemo

Udaljenost točke $T_1(3, 4, 5)$:

$$d_1 = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 12}{\sqrt{61}} = \frac{37}{\sqrt{61}} = \frac{37}{7{,}81} = \underline{4{,}73}$$

Udaljenost točke $T_2(3, -4, -5)$

$$d_2 = \frac{6 \cdot 3 + 4(-4) + 3\,(-5) - 12}{\sqrt{61}} = -\frac{25}{\sqrt{61}} = \underline{-3{,}20}$$

Za udaljenost d_1 dobili smo pozitivnu, a za d_2 negativnu vrijednost. To znači, da točka T_1 i ishodište O koordinatnog sustava leže na različitim stranama zadane ravnine, dok točka T_2 i ishodište O leže s iste strane ravnine.

e) Jednadžba ravnine u segmentnom obliku

Ravnina u prostoru posve je određena, ako su zadani segmenti, t. j. odsječci m, n i q, što ih ravnina siječe na koordinatnim osima (vidi sl. 53).

Polazimo od opće jednadžbe ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Točke $M(m, o, o)$, $N(o, n, o)$ i $Q(o, o, q)$ leže u zadanoj ravnini, pa uvrštenje koordinata tih točaka u jednadžbu ravnine daje:

$$\begin{aligned} Am + D &= 0, \quad \text{odatle} \quad m = -\frac{D}{A} \quad \text{ili} \quad \frac{A}{D} = -\frac{1}{m} \\ Bn + D &= 0, \quad \text{odatle} \quad n = -\frac{D}{B} \quad \text{ili} \quad \frac{B}{D} = -\frac{1}{n} \\ Cq + D &= 0, \quad \text{odatle} \quad q = -\frac{D}{C} \quad \text{ili} \quad \frac{C}{D} = -\frac{1}{q} \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Podijelimo li jednadžbu ravnine s $-D$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$$

i uvrstimo li ovamo jednakosti (a), dobit ćemo

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{q} = 1 \qquad (49)$$

To je jednadžba ravnine u segmentnom obliku.

Uvrstimo li redom u (49) $z = 0$, $y = 0$ i $x = 0$, dobit ćemo jednadžbe pravaca, u kojima zadana ravnina siječe koordinatne ravnine:

$$MN \equiv \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1; \quad MQ \equiv \frac{x}{m} + \frac{z}{q} = 1, \quad NQ = \frac{y}{n} + \frac{z}{q} = 1$$

(vidi sl. 53).

Primijetimo još, da položaj ravnine u prostoru najlakše odredimo izvršivši prelaz na segmentni oblik njene jednadžbe.

Primjer.

Prikaži jednadžbu ravnine $5x - 2y + 8z + 4 = 0$ u segmentnom obliku.

Podijelivši zadanu jednadžbu ravnine s -4 dobijemo

$$-\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}y - 2z - 1 = 0$$

Odatle

$$\frac{x}{-\frac{4}{5}} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-\frac{1}{2}} = 1 \qquad \text{segmentni oblik}$$

pa je

$$m = -\frac{4}{5} \qquad n = 2 \;; \; q = -\frac{1}{2}$$

f) Jednadžba ravnine kroz jednu zadanu točku $T_1(x_1, y_1, z_1)$

Polazimo od opće jednadžbe ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ravnina prolazi točkom $T_1(x_1, y_1, z_1)$, dakle

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

Oduzmemo li od prve jednadžbe drugu, dobijemo

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{50}$$

jednadžba ravnine kroz jednu točku $T_1(x_1, y_1, z_1)$.

Mnogo je zgodniji za praktičnu primjenu drugi oblik te jednadžbe. Da ga dobijemo, podijelimo (50) s C, pa će uz oznaku $\frac{A}{C} = A_1$ i $\frac{B}{C} = B_1$ glasiti taj drugi oblik

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + (z - z_1) = 0 \tag{50a}$$

Dva koeficijenta A_1 i B_1 ostala su neodređena, jer ravnina nije određena s jednom točkom, već s tri.

g) Jednadžba ravnine kroz tri zadane točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$

Kako zadana ravnina prolazi trima zadanim točkama T_1, T_2 i T_3, koordinate tih točaka moraju zadovoljavati jednadžbu ravnine:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \end{aligned}$$

Dobili smo homogeni sustav od četiri linearne algebarske jednadžbe s četiri nepoznanice A, B, C i D. Znamo, da takav sustav ima rješenja različita od očevidnih, ako je determinanta sustava $\Delta = 0$.

Prema tome je

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (51)$$

jednadžba ravnine kroz tri zadane točke

Budući da je determinanta jednaka nuli, možemo je svesti na determinantu trećeg reda tako, da od elemenata svakog retka oduzmemo pripadne elemente, na primjer drugog retka:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (51a)$$

Primjer.

Odredi jednadžbu ravnine, koja prolazi točkama $T_1(1, 1, -1)$, $T_2(3, -4, -2)$ i $T_3(-3, 0, 1)$. Prema (51a)

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z + 1 \\ 3 - 1 & -4 - 1 & -2 + 1 \\ -3 - 1 & 0 - 1 & 1 + 1 \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z + 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Razvijemo determinantu po elementima prvog retka:

$$(x - 1)(-10 - 1) - (y - 1)(4 - 4) + (z + 1)(-2 - 20) = 0$$

$$\begin{aligned} -11x + 11 - 22z - 22 &= 0 \\ 11x + 22z + 11 &= 0 \\ \underline{x + 2z + 1} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

Ravnina je okomita na ravnini XZ.

h) Jednadžba ravnine u parametarskom obliku

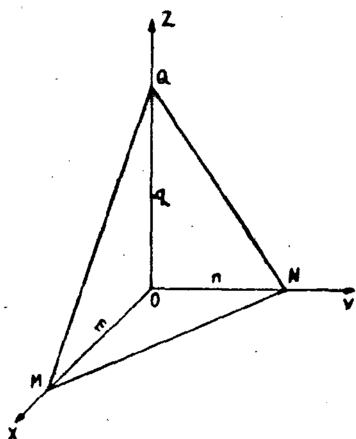
Neka je ravnina E zadana s dva pravca m i n, koji se sijeku u točki $A(x_1, y_1, z_1)$ (sl. 54).

Zadanoj točki $A(x_1, y_1, z_1)$ dodijelimo radijvektor $\vec{a}\begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases}$ a zadanim prav-

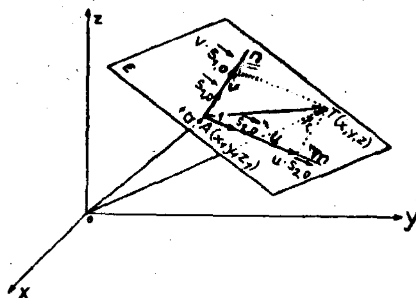
cima m i n jedinične vektore $\vec{s}_1^0 \begin{cases} \cos\alpha_1 = a_1 \\ \cos\beta_1 = b_1 \\ \cos\gamma_1 = c_1 \end{cases}$ i $\vec{s}_2^0 \begin{cases} \cos\alpha_2 = a_2 \\ \cos\beta_2 = b_2 \\ \cos\gamma_2 = c_2 \end{cases}$

Točki zadane ravnine $T(x, y, z)$, koju smo odabrali po volji, dodijelimo radij-

vektor $\vec{r}\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ Prema sl. 54:



Sl. 53



Sl. 54

$$\vec{r} = \vec{a} + \overrightarrow{AT} \qquad \text{(a)}$$

Vektor $\overrightarrow{AT}$ rastavimo u komponente u smjeru zadanih pravaca m i n, pri čemu duljinu prve komponente označimo s u, a druge s v. u i v su parametri, koje moramo mijenjati od $-\infty$ do $+\infty$, da dobijemo sve točke zadane ravnine. Na pr. za $u = 0$ i $v = 0$ dobijemo zadanu točku A ravnine.

Imamo dakle:

$$\overrightarrow{AT} = u\,\vec{s}_1^0 + v\,\vec{s}_2^0$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\vec{r} = \vec{a} + u\,\vec{s}_1^0 + v\,\vec{s}_2^0 \qquad (52)$$

To je parametarska jednadžba ravnine u vektorskom obliku.

Prelazimo na skalarne komponente vektora $\vec{r}$, $\vec{a}$, $\vec{s}_1^0$ i $\vec{s}_2^0$.
Dobijemo:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ua_1 + va_2 \\ y &= y_1 + ub_1 + vb_2 \\ z &= z_1 + uc_1 + vc_2 \end{aligned} \qquad \text{(52a)}$$

To je jednadžba ravnine u parametarskom obliku.

Vidimo, da u jednadžbu ravnine ulaze dva parametra u i v. U tome se očituje dvodimenzionalnost ravnine.

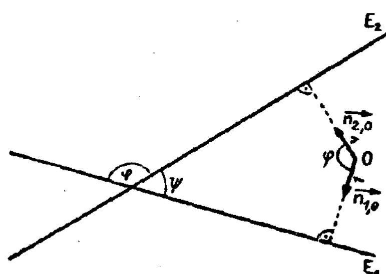
5. Dvije ravnine

a) Kut dviju ravnina

Pod kutom dviju ravnina

$$E_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
i
$$E_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

razumije se kut njihovih normala, jer je, kako se vidi iz slike 55, kut između normala jednak jednom od kutova zadanih ravnina (kao kutovi s okomitim krakovima).



Sl. 55

Jasno je, da je drugi kut ravnina suplement prvoga: $\psi = 180° - \varphi$. Na taj način svodimo kut dviju ravnina na kut dvaju pravaca, koji već znamo odrediti [vidi 3. a) ovog §].

Povučemo li te normale iz ishodišta O koordinatnog sustava i dodijelimo li tim normalama jedinične vektore

$$\vec{n_1^0} \begin{cases} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{cases} \quad \text{i} \quad \vec{n_2^0} \begin{cases} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{cases}$$

tada prema (19a) imamo

$$\cos\varphi = \vec{n_1^0}\,\vec{n_2^0} = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \tag{53}$$

ili obzirom na formule (47)

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{53a}$$

b) Uvjet okomitosti dviju ravnina

Ako su dvije ravnine međusobno okomite, kut $\varphi = 90°$, a $\cos 90° = 0$, pa prema (53), odnosno (53a) imamo:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{54}$$

uvjet okomitosti dviju ravnina.

c) Uvjet paralelnosti dviju ravnina

Ako su dvije ravnine međusobno paralelne, njihove normale povučene iz ishodišta padaju u isti smjer, pa je

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad ; \quad \beta_1 = \beta_2 \quad ; \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

odnosno

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \quad , \quad \cos\beta_1 = \cos\beta_2 \quad \text{i} \quad \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$$

Prema tome obzirom na (47) dobijemo

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

ili

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Iste vrijednosti dobijemo za omjere $\frac{B_1}{B_2}$ i $\frac{C_1}{C_2}$, pa je

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{55}$$

uvjet paralelnosti dviju ravnina.

To znači: koeficijenti od x, y i z u jednadžbama paralelnih ravnina su proporcionalni ili jednaki.

Tako, na pr., ravnine navedene u primjeru 1. na str. 11 ne sijeku se u jednoj točki, jer su prve dvije ravnine međusobno paralelne $\left(\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\right)$, pa sijeku treću ravninu u paralelnim pravcima r i q (vidi sl. 7). Ravnine navedene u primjeru 2. ne sijeku se uopće, jer su prema (55) međusobno paralelne (vidi sl. 8).

Iz formule (54) i (55) vidimo, da koeficijenti A, B i C od x, y i z u jednadžbi ravnine određuju njen smjer, dok apsolutni član D određuje položaj ravnine u prostoru.

Primjeri

1. Odredi kutove, što ih međusobno zatvaraju ravnine

$$4x - 5y + 3z + 7 = 0 \quad \text{i} \quad 2x + 3y - z - 13 = 0$$

Prema (53a):

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot 2 + (-5)\cdot 3 + 3(-1)}{\sqrt{16+25+9}\cdot\sqrt{4+9+1}} = \frac{8-15-3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{10}{\sqrt{700}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7} = -\frac{2{,}65}{7} = -0{,}379$$

$$\underline{\varphi} = 180^\circ - 67^\circ 40' = \underline{112^\circ 20'} \quad , \quad \underline{\psi} = \underline{67^\circ 40'}$$

2. Odredi jednadžbu ravnine, koja prolazi točkom (4, —1, 2) paralelno s ravninom

$$7x + 5y - 4z + 13 = 0$$

Prema (50):

$$A(x-4)+B(y+1)+C(z-2)=0$$

Prema (55):

$$A=7\,;\,B=5\quad;\;C=-4$$

$$7(x-4)+5(y+1)-4(z-2)=0$$

Odatle

$$\underline{7x+5y-4z-15=0}$$

3. Napiši jednadžbu ravnine, koja je okomita na ravninama $6x-3y-8z+4=0$ i $3x-4y+16z-7=0$, a siječe na osi Z odrezak $q=12$.

Iz posljednjeg uvjeta zadataka slijedi, da tražena ravnina prolazi točkom $C(0, 0, 12)$, pa prema (50a) njena jednadžba glasi:

$$A_1(x-0)+B_1(y-0)+(z-12)=0$$

ili

$$A_1x+B_1y+1\;z-12=0 \qquad \text{(a)}$$

$A_1=?\qquad B_1=?$

Prema (54):

$$6A_1-3B_1-\;8=0$$

$$3A_1-4B_1+16=0$$

Iz tog sustava jednadžbi računamo A_1 i B_1.

Dobijemo: $\quad A_1=\frac{16}{3}\quad;\quad B_1=8$

Uvrštenje u (a) daje

$$\frac{16}{3}x+8y+z-12=0$$

ili

$$\underline{16x+24y+3z-36=0}$$

4. Odredi međusobnu udaljenost d dviju paralelnih ravnina

1)
$$6x-2y+9z+22=0$$
$$6x-2y+9z+33=0$$

Zadane ravnine su paralelne, jer x, y i z imaju iste koeficijente. Napišimo njihove jednadžbe u normalnom obliku i odredimo duljine p_1 i p_2 normala bačenih iz ishodišta O koordinatnog sustava na te ravnine.

Prema (47a) dijelimo obje jednadžbe s $-\sqrt{36+4+81}=-\sqrt{121}=-11$

Dobijemo:

$$-\frac{6}{11}x+\frac{2}{11}y-\frac{9}{11}z-2=0 \qquad p_1=2$$

$$-\frac{6}{11}x+\frac{2}{11}y-\frac{9}{11}z-3=0 \qquad p_2=3$$

Budući da su ravnine paralelne, a apsolutni član D u obim jednadžbama ima **isti** predznak, obje ravnine leže s jedne strane od ishodišta O.

Prema tome:

$$\underline{d = p_2 - p_1 = 3 - 2 = 1}$$

2)
$$3x + 2y - 6z + 21 = 0$$
$$3x + 2y - 6z - 28 = 0$$

Postupamo na isti način. Prvu jednadžbu dijelimo s $-\sqrt{9+4+36} = -7$, a drugu s $+7$:

dobijemo $p_1 = 3$, $p_2 = 4$

Kako apsolutni članovi zadanih jednadžbi imaju različite predznake, ravnine leže na različitim stranama od ishodišta O, pa je

$$\underline{d = p_1 + p_2 = 3 + 4 = 7}$$

d) Presječnica dviju ravnina

Dvije ravnine, ukoliko nisu paralelne, sijeku se u jednom pravcu. O tome smo već govorili promatrajući pravac u prostoru kao presječnicu dviju zadanih ravnina [vidi 2.c) ovog paragrafa].

Primjer

Odredi presječnicu ravnina

$$3x + 2y - 4z + 13 = 0$$
$$5x - 3y + 2z - 2 = 0$$

izrazivši je u kanonskom obliku.

Do tražene presječnice dođemo ovog puta tako, da najprije izvedemo njenu jednadžbu u parametarskom obliku, a zatim pređemo na kanonski oblik.

Stavimo $x = t$, gdje je t parametar.

Uvrštenje u zadane jednadžbe daje:

$$2y - 4z = -3t - 13$$
$$-3y + 2z = -5t + 2$$

Pomnožimo li drugu jednadžbu s 2 i zbrojimo li je s prvom jednadžbom, dobijemo

$$-4y = -13t - 9$$

a odatle

$$y = \frac{13}{4}t + \frac{9}{4}$$

Iz prve ili druge jednadžbe nakon uvrštenja gornje vrijednosti za y dobijemo:

$$z = \frac{19}{8}t + \frac{35}{8}$$

Prema tome

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= \frac{13}{4}t + \frac{9}{4} \\ z &= \frac{19}{8}t + \frac{35}{8} \end{aligned}\right|$$

jednadžbe tražene presječnice u parametarskom obliku

Iz tih jednadžbi računamo t. Izjednačenje izraza dobivenih za t daje:

$$\frac{x}{1} = \frac{y - \frac{9}{4}}{\frac{13}{4}} = \frac{z - \frac{35}{8}}{\frac{19}{8}}$$

ili

$$\frac{x}{8} = \frac{y - \frac{9}{4}}{26} = \frac{z - \frac{35}{8}}{19}$$

kanonski oblik jednadžbe tražene presječnice

6. Sjecište triju ravnina

O tome smo već potanko govorili proučavajući determinante trećeg reda (vidi § 1, 3), pa znamo, da se općenito tri ravnine sijeku u jednoj točki, čije koordinate određujemo tako, da riješimo sustav, što ga čine jednadžbe zadanih ravnina.

Na pr. da odredimo sjecište koordinatnih ravnina XY, YZ i ZX, kojima su jednadžbe $z = 0$, $x = 0$ i $y = 0$, riješimo sustav

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

a to su koordinate ishodišta O koordinatnog sustava.

Riješimo nekoliko primjera, koji ilustriraju posebne slučajeve sjecišta triju ravnina.

Primjeri

1. Odredi sjecište triju ravnina

$$\begin{aligned} P &\equiv 2x - 3y + 5z - 6 = 0 \\ Q &\equiv x + y + z - 2 = 0 \\ R &\equiv 3x - 2y + 6z - 7 = 0 \end{aligned}$$

Riješimo li taj sustav jednadžbi pomoću determinanata, dobit ćemo:

$$x_0 = \frac{8}{0}, \quad y_0 = \frac{-3}{0}, \quad z_0 = \frac{-5}{0}$$

jer su prva tri člana treće jednadžbe zbroj odgovarajućih članova prve i druge jednadžbe.

Ti rezultati pokazuju, da se ravnine ne sijeku, odnosno da se sijeku u beskonačno dalekoj točki, a kako zadane ravnine nisu međusobno paralelne [nije ispunjen uvjet paralelnosti (55)], to je samo tako moguće, da se zadane ravnine međusobno sijeku u paralelnim pravcima (vidi sl. 9).

Da se u to uvjerimo, odredimo jednadžbe pravaca p, q i r, u kojima se sijeku zadane ravnine. Postupajući na način naveden u predašnjem primjeru, dobijemo:

presječnicu r ravnina P i Q : $$\frac{x}{8} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-3} = \frac{z - \frac{3}{2}}{-5}$$

presječnica p ravnina Q i R : $$\frac{x}{8} = \frac{y - \frac{5}{8}}{-3} = \frac{z - \frac{11}{8}}{-5}$$

presječnica q ravnina P i R : $$\frac{x}{8} = \frac{y + \frac{1}{8}}{-} = \frac{z - \frac{9}{8}}{-5}$$

Izvedi to!

Sve tri presječnice imaju iste koeficijente smjera 8, —3 i —5, dakle se **ravnine zaista sijeku u trima paralelnim pravcima** p, q i r (vidi sl. 9).

2. Odredi sjecište ravnina

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z - 6 &= 0 \\ x + y + z - 2 &= 0 \\ 3x - 2y + 6z - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Rješavanje toga sustava jednadžbi daje:

$$x_0 = \frac{0}{0}\,, \quad y_0 = \frac{0}{0}\,, \quad z_0 = \frac{0}{0}\,,$$

jer je treća jednadžba zbroj prvih dviju.

Kako izraz $\frac{0}{0}$ nema određenog smisla, zaključujemo, da se zadane **ravnine ne sijeku u jednoj, već** u beskonačno mnogo točaka, t. j. sijeku se u jednom pravcu.

Da to dokažemo, odredimo na gore navedeni način presječnice zadanih **ravnina. Dobit ćemo, da** se sve tri ravnine sijeku u pravcu, kojemu je jednadžba:

$$\frac{x}{8} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-3} = \frac{z - \frac{3}{2}}{-5}$$

(vidi sl. 10).

Vidi također § 1, točku 7.

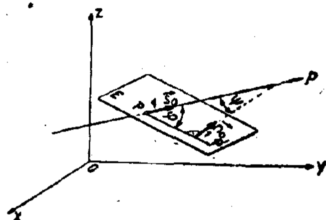
7. Pravac i ravnina

a) Kut pravca i ravnine

Pod kutom pravca p i ravnine E razumijemo kut φ, što ga zatvara **pravac** p sa svojom ortogonalnom projekcijom p' na zadanu ravninu E (vidi sl. 56).

Prema toj slici

$$\varphi = 90° - \psi$$



Sl. 56

Zadanom pravcu

$$p \equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

dodijelimo jedinični vektor

$$\vec{s_0} \begin{cases} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{cases}$$

a zadanoj ravnini

$$E \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

jedinični vektor normale

$$\vec{n_0} \begin{cases} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{cases}$$

Prema slici 56 i formuli (19a) imamo:

$$\cos\psi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \tag{56}$$

a uzevši u obzir formule (39) i (47) i $\psi = 90° - \varphi$, dobijemo

$$\sin\varphi = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{56a}$$

To je kut pravca i ravnine.

b) Uvjet paralelnosti pravca i ravnine

Ako su pravac i ravnina međusobno paralelni, tada je kut $\varphi = 0$, odnosno $\sin\varphi = \sin 0 = 0$, pa je prema (56a)

$$aA + bB + cC = 0 \tag{57}$$

uvjet paralelnosti pravca i ravnine.

c) Uvjet okomitosti pravca i ravnine

Ako je pravac okomit na ravnini, vektori $\vec{s}_0$ i $\vec{n}_0$ su paralelni (sl. 56), pa je

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$$
$$\cos\beta_1 = \cos\beta_2$$
$$\cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$$

ili obzirom na formule (39) i (47):

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ili

$$\frac{a}{A} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Iste vrijednosti dobijemo za omjere $\frac{b}{B}$ i $\frac{c}{C}$, pa je

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \tag{58}$$

uvjet okomitosti pravca i ravnine.

Pazi! Uvjet okomitosti dvaju pravaca ili ravnina izražen je u obliku **sume** produkata, koja je jednaka nuli [vidi (43) i (54)], a uvjet paralelnosti — u **obliku** jednakih omjera [vidi (44) i (55)]. U slučaju okomitosti i paralelnosti pravca i ravnine baš je obratno [vidi (57) i (58)].

Označimo s t zajedničku vrijednost omjera (58)

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = t$$

Odatle

$$a = t \cdot A$$
$$b = t \cdot B$$
$$c = t \cdot C$$

t. j. koeficijenti smjera pravca su razmjerni s koeficijentima jednadžbe ravnine. Uzmemo li, da je faktor razmjernosti $t = 1$, dobijemo:

$$a = A; \qquad b = B; \qquad c = C$$

pa jednadžba normale na ravninu $Ax + By + Cz + D = 0$ glasi

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C} \tag{58a}$$

gdje su x_1, y_1 i z_1 koordinate neke točke normale.

d) Probodište pravca i ravnine

Koordinate točke, u kojoj pravac probada ravninu, najjednostavnije odredimo tako, da izrazivši jednadžbu zadanog pravca u parametarskom obliku, odredimo onu vrijednost parametra t, koja odgovara traženom probodištu. Tu vrijednost parametra t dobijemo tako, da parametarske jednadžbe pravca uvrstimo u jednadžbu zadane ravnine.

Pokažimo to na primjeru:

Odredi probodište P pravca $p \equiv \frac{x - 2}{6} = \frac{y + 3}{-5} = \frac{z - 1}{3}$

i ravnine

$$E \equiv 3x + 4y + z + 6 = 0$$

Parametarski oblik jednadžbe pravca p:

$$x = 6t + 2$$
$$y = -5t - 3 \tag{a}$$
$$z = 3t + 1$$

Uvrštenje u jednadžbu ravnine E daje:

$$3(6t + 2) + 4(-5t - 3) + (3t + 1) + 6 = 0$$

ili

$$t + 1 = 0$$

Odatle

$$t = -1$$

To je ona vrijednost parametra t, koja odgovara traženom probodištu P.

Uvrštenje $t = -1$ u (a) daje:

$$x = -4$$
$$y = 2$$
$$z = -2$$

$$\underline{P(-4, 2, -2)}$$

e) Uvjeti da pravac leži u ravnini

Ako zadani pravac

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

leži u zadanoj ravnini

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

1) on je s njome paralelan, pa je prema (57)

$$aA + bB + cC = 0 \tag{59}$$

2) ravnina prolazi točkom $T_1(x_1, y_1, z_1)$ pravca, dakle

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \tag{59a}$$

To su uvjeti, da pravac leži u ravnini.

Primjeri

1. Odredi kut, što ga pravac $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ zatvara s ravninom $2x - 6y + 3z - 7 = 0$

Prema (56a):

$$\sin\varphi = \frac{3 \cdot 2 + 2(-6) + (-4) \cdot 3}{\sqrt{9+4+16} \cdot \sqrt{4+36+9}} = -\frac{18}{7\sqrt{29}} = -\frac{18\sqrt{29}}{203}$$

ili $\sin\varphi = -0{,}478$

$$\underline{\varphi_1 = 28°30'} \quad ; \quad \varphi_2 = 180° - 28°30' = \underline{151°30'}.$$

2. Napiši jednadžbu pravca, koji prolazi točkom $(-2, -1, 3)$ a usporedan je s ravninama

$$5x - y - z + 4 = 0 \quad , \quad x + 3y + 2z - 7 = 0$$

Jednadžba traženog pravca glasi:

$$\frac{x+2}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-3}{c} \tag{a}$$

a ? b ? c ?

Traženi pravac je paralelan sa zadanim ravninama, dakle prema (57):

$$5a - b - c = 0 \; / : c$$
$$a + 3b + 2c = 0 \; / : c$$

$$5\frac{a}{c} - \frac{b}{c} - 1 = 0$$
$$\frac{a}{c} + 3\frac{b}{c} + 2 = 0$$

Odatle računamo $\frac{a}{c}$ i $\frac{b}{c}$

Dobijemo:

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{16} \; ; \; \frac{b}{c} = -\frac{11}{16} \qquad \text{(b)}$$

Podijelimo li nazivnike u jednadžbi (a) s c i uvrstimo li vrijednosti (b), dobit ćemo

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-11} = \frac{z-3}{16}$$

3. Napiši jednadžbu pravca, koji prolazi točkom (3, —2, 1) a okomit je na ravnini

$$3x + 4y - z + 3 = 0$$

Jednadžba traženog pravca

$$\frac{x-3}{a} = \frac{y+2}{b} = \frac{z-1}{c}$$

ili

$$\frac{x-3}{\frac{a}{c}} = \frac{y+2}{\frac{b}{c}} = \frac{z-1}{1} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{a}{c} = ? \qquad \frac{b}{c} = ?$$

Prema (58):

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{-1}$$

Odatle:

$$\frac{a}{c} = \frac{3}{-1} \; ; \; \frac{b}{c} = \frac{4}{-1}$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{1}$$

ili

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

Do istog rezultata dolazimo i neposredno po formuli (58a).

4. Odredi jednadžbu ravnine, koja je zadana s dva ukrštena pravca:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1} \quad ; \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-4}$$

Iz jednadžbi zadanih pravaca vidimo, da se pravci sijeku u točki $S(1, -2, 3)$. Tražena ravnina prolazi tom točkom S, dakle prema (50a)

$$A_1(x-1)+B_1(y+2)+(z-3)=0 \qquad (a)$$

$$A_1 = ? \qquad B_1 = ?$$

Prema (59):

$$\begin{aligned} 3A_1 + 2B_1 - 1 &= 0 \\ 2A_1 - 5B_1 - 4 &= 0 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \text{Odatle računamo } A_1 \text{ i } B_1$$

Dobijemo:

$$A_1 = \frac{13}{19}\ , \quad B_1 = -\frac{10}{19}$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\frac{13}{19}(x-1)-\frac{10}{19}(y+2)+(z-3)=0$$

ili

$$\underline{13x-10y+19z-90=0}$$

5. U primjeru na str. 68 odredili smo pomoću diferencijalnog računa najkraću udaljenost točke $T(2, 1, 3)$ od pravca

$$p \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

Riješimo sada isti zadatak na čisto analitičko geometrijski način. U tu svrhu:

1) Točkom $T(2, 1, 3)$ položimo ravninu E okomitu na zadani pravac.

Prema (50a)

$$E \equiv A_1(x-2)+B_1(y-1)+(z-3)=0$$

Prema (58)

$$\frac{1}{A_1}=\frac{2}{B_1}=\frac{3}{1}$$

Odatle

$$A_1=\frac{1}{3}\ , \quad B_1=\frac{2}{3}$$

$$E \equiv \frac{1}{3}(x-2)+\frac{2}{3}(y-1)+(z-3)=0$$

ili

$$E \equiv x+2y+3z-13=0$$

2) Odredimo probodište P ravnine E sa zadanim pravcem p.

p u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} x &= t+1 \\ y &= 2t+1 \\ z &= 3t+1 \end{aligned}$$

Uvrštenje u E daje

$$t + 1 + 4t + 2 + 9t + 3 - 13 = 0$$

ili

$$14t - 7 = 0$$

$$t_0 = \frac{1}{2}$$

pa je

$$x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = \frac{5}{2}$$

$$P\left(\frac{3}{2}, \ 2, \ \frac{5}{2}\right)$$

3) $d_{min} = TP =$ prema (9) $= \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (1 - 2)^2 + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2}$

$$\underline{d_{min} = \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

6. Odredi najkraću udaljenost mimosmjernih pravaca

I. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{3}$ II. $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{4}$

Pod najkraćom udaljenosti dvaju mimosmjernih pravaca razumije se duljina okomice, koja je zajednička jednom i drugom mimosmjernom pravcu.

Da odredimo tu najkraću udaljenost, postupamo kako slijedi:

1) Jednim pravcem, na pr. prvim, položimo paralelnu ravninu E s drugim pravcem

Pravac I. leži u ravnini

$$E \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

dakle prema (59) i (59a):

$$2A + 4B + 3C = 0$$
$$A + 2B - C + D = 0$$

Ravnina E je paralelna s pravcem II., dakle prema (57):

$$3A - 2B + 4C = 0$$

Dobili smo homogeni sustav od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice A, B, C i D. Znamo, da izjednačena s nulom determinanta toga sustava

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

daje traženu jednadžbu ravnine E.

Da je pojednostavimo, oduzmimo od elemenata prvog i trećeg retka elemente trećeg retka:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Odatle:

$$(x - 1)\,22 - (y - 2)(-1) + (z + 1)(-16) = 0$$

ili $$E \equiv 22x + y - 16z - 40 = 0$$

2) Očito je, da je udaljenost bilo koje točke pravca II., na pr. točke (—2, —1, 3), **od ravnine** E jednaka traženoj najkraćoj udaljenosti zadanih mimosmjernih pravaca.

Prema (47a) i (48a) imamo:

$$d_{min} = \frac{22 \cdot (-2) - 1 - 16 \cdot 3 - 40}{\sqrt{484 + 1 + 256}} = -\frac{133}{\sqrt{741}} = -\frac{133}{27{,}2} = -4{,}89$$

$$\underline{d_{min} = 4{,}89}$$

Kasnije ćemo slični zadatak riješiti pomoću diferencijalnog računa [vidi **§ 4, 15, c)**]. Riješi ga sada na gore navedeni način.

Međusobnu udaljenost d mimosmjernih pravaca

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}\,; \quad \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

možemo odrediti i neposredno pomoću formule

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

§ 4. FUNKCIJE DVIJU I VIŠE NEZAVISNIH PROMJENLJIVIH

1. Općenito o funkciji dviju promjenljivih. Njeno geometrijsko značenje i neprekinutost

Znamo, da je na pr. obujam V kružnog valjka jednak $\pi r^2 v$. Mijenjamo li polumjer r osnovke i visinu v valjka nezavisno jedno od drugoga, zavisit će vrijednost obujma V od vrijednosti uzetih za r i v. To znači, obujam V valjka je funkcija dviju nezavisnih promjenljivih r i v, t. j. $V = f(r, v)$

Općenito funkcionalnu zavisnost veličine z od veličina x i y označujemo simbolički sa $z = f(x, y)$ z je, dakle, funkcija ili zavisna promjenljiva, a x i y su argumenti ili nezavisne promjenljive. Jasno je, da funkcija z dviju nezavisnih promjenljivih x i y može biti izražena ne samo u eksplicitnom obliku $z = f(x, y)$, već i u implicitnom obliku $F(x, y, z) = 0$.

Kako je za geometrijsko predočivanje argumenata x i y potrebna ravnina XY, za predočivanje funkcije $z = f(x, y)$ potreban je prostorni koordinatni sustav. Zadajemo po volji apscisu x i ordinatu y, t. j. točku u ravnini XY, a iz zadane funkcije $z = f(x, y)$ računamo pripadnu kotu ili aplikatu z. Skup svih parova vrijednosti za x i y, t. j. skup točaka u ravnini XY, čine područje definicije funkcije z, koje nije više jednodimenzionalno, kao kod funkcije jedne nezavisne promjenljive, već je dvodimenzionalno, pa čini dio σ ili cijelu ravninu XY (vidi sl. 57).

Konstruiramo li u svim točkama toga područja σ okomice na ravninu XY, i nanesemo li na te okomice pripadne vrijednosti funkcije z, izračunate iz zada-

nog izraza $f(x, y)$ za tu funkciju, krajnje točke tih okomica ili aplikata (kota) dat će dvodimenzionalnu geometrijsku tvorevinu, koja se zove ploha.

Prema tome, funkcija dviju nezavisnih promjenljivih $z = f(x, y)$ predočuje geometrijski plohu u prostoru.

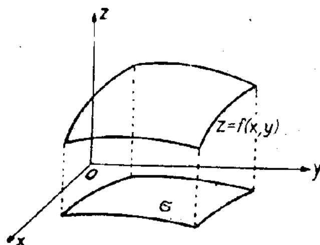
Iz analitičke geometrije u prostoru (vidi § 3) znamo već, da funkcija linearna u x, y i z, t. j.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{u implicitnom obliku,}$$

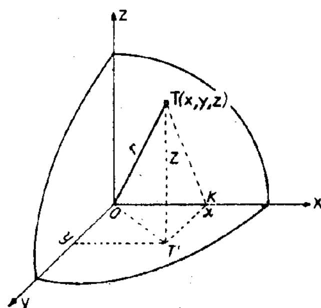
odnosno

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C} \qquad \text{u eksplicitnom obliku}$$

predočuje ravninu u prostoru, t. j. ravnu plohu. Jasno je, da je u općem slučaju područje definicije linearne funkcije cijela ravnina XY.



Sl. 57



Sl. 58

Slično tome kako funkcija jedne nezavisne promjenljive $y = f(x)$ predočuje geometrijski pravac, ako je linearna u x i y, odnosno krivulju, ako u x i y nije linearna, predočuje funkcija dviju nezavisnih promjenljivih $z = f(x, y)$, odnosno $F(x, y, z) = 0$, koja nije linearna u x, y i z, neravnu oblu plohu.

Kao primjer izvedimo jednadžbu kugline plohe ili, kako se obično kraće kaže, kugle.

Slika 58 predočuje prvi oktant kugline plohe polumjera r sa središtem u ishodištu O koordinatnog sustava. Kako vidimo, kuglina ploha prikazana je u slici u lijevom pravokutnom koordinatnom sustavu. U tom lijevom sustavu prelazi os $+X$ u os $+Y$, os $+Y$ u os $+Z$ i os $+Z$ u os $+X$ okretanjem u smislu kazaljke na satu.

Odaberimo na kuglinoj plohi točku $T(x, y, z)$ po volji, pa iz pravokutnog trokuta $OT'T$ imamo

$$r^2 = z^2 + OT'^2$$

a iz pravokutnog trokuta OKT' slijedi

$$OT'^2 = x^2 + y^2.$$

Uvrštenje u prvu jednakost daje

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

To je jednadžba kugline plohe polumjera r, kojoj je središte u ishodištu, u implicitnom obliku.

Odatle

$$z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \qquad (60a)$$

jednadžba kugline plohe u eksplicitnom obliku.

Vidimo, da z nije linearna funkcija od x i y i da je njeno područje definicije krug polumjera r, kojemu je središte u ishodištu O.

Ako središte kugle nije u ishodištu O koordinatnog sustava, već u nekoj točki $S(m, n, q)$, jednadžba kugline plohe glasi:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - q)^2 = r^2 \qquad (61)$$

ili, ako kvadriramo binome i uredimo:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2qz + (m^2 + n^2 + q^2 - r^2) = 0$$

Iz toga izraza slijedi opća jednadžba kugline plohe:

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0 \qquad (61a)$$

Na pr. jednadžba

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y + 20z - 19 = 0$$

predočuje kuglu.

Da odredimo koordinate njena središta S i njen polumjer r, podijelimo jednadžbu s 4:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 + 5z) - \frac{19}{4} = 0$$

i nadopunimo izraze u zagradama na potpune kvadrate:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{19}{4} + 1 + 4 + \frac{25}{4}$$

ili

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = 16$$

$$\underline{S\left(1, -2, -\frac{5}{2}\right)} \quad ; \quad \underline{r = 4.}$$

Prostorno geometrijsko značenje funkcije jedne nezavisne promjenljive $F(x, y) = 0$.

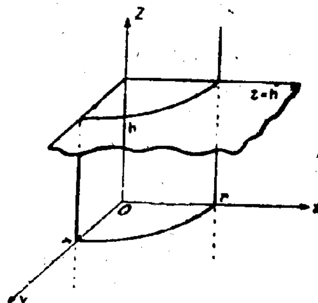
Znamo, da funkcija $F(x, y) = 0$, odnosno $y = f(x)$ predočuje geometrijski krivulju u ravnini XY. Međutim, promatramo li tu funkciju prostorno, moramo uzeti u obzir, da u izraz funkcije ne ulazi aplikata z, a to znači da aplikati z možemo dati bilo koju vrijednost pozitivnu i negativnu. Prema tome funkcija

$F(x, y) = 0$ predočuje geometrijski plohu valjka, kojoj su izvodnice paralelne s osi Z, odnosno okomite na ravnini XY, i koja siječe ravninu XY u krivulji $F(x, y) = 0$, ili drugim riječima, kojoj je krivulja $F(x, y) = 0$ trag u ravnini XY.

Tako na pr. funkcija $x^2 + y^2 = r^2$ predočuje geometrijski u prostoru uspravni kružni valjak, kojemu je os simetrije os Z (vidi sl. 59)

Iz istog je razloga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jednadžba eliptičnog valjka s istom osi simetrije. Visine obaju valjaka protežu se od $-\infty$ do $+\infty$. Hoćemo li zadati valjak određene visine h moramo ga presjeći ravninama, na pr. ravninom $XY(z = 0)$ i ravninom, koja je paralelna s ravninom XY, a udaljena od nje za h: $z = h$. Slika 59 predočuje uspravni kružni valjak visine h, kojemu je jednadžba

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ z &= 0 \\ z &= h \end{aligned}\right|$$



Sl. 59

Kako u izraz funkcije $F(x, y) = 0$ ne ulazi z, presjeci plohe valjka ravninama $z = h$ uvijek su iste krivulje $F(x, y) = 0$

Ako je funkcija $F(x, y) = 0$ linearna u x i y, ona predočuje ravninu, koja je okomita na ravnini XY i koja ima za trag u toj ravnini pravac $F(x, y) = 0$. O tom je već bilo govora (vidi § 3, 4). Isto tako predočuju jednadžbe $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i $y^2 = 2px$ hiperbolu, odnosno parabolu u ravnini XY, a prostorno su to plohe valjaka, kojima su izvodnice paralelne s osi Z i koje sijeku ravninu XY u tim krivuljama.

Neprekinutost funkcije $z = f(x, y)$ definira se slično kao i neprekinutost funkcije jedne promjenljive $y = f(x)$ (vidi Dio I. § 8, 1).

Funkcija $z = f(x, y)$ neprekinuta je u točki $T_1(x_1, y_1)$, ako teži svojoj vrijednosti $z_1 = f(x_1, y_1)$ u toj točki T_1, kad x teži x_1, a y teži y_1, t. j. ako je

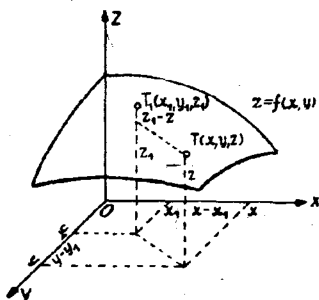
$$\lim_{\substack{x \to x_1 \\ y \to y_1}} f(x, y) = f(x_1, y_1) = z_1$$

Iz pojma limesa slijedi druga definicija neprekinutosti funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T_1(x_1, y_1)$:

Funkcija $z = f(x, y)$ neprekinuta je u točki $T_1(x_1, y_1)$, ako je

$$|f(x_1, y_1) - f(x, y)| < \varepsilon, \quad \text{čim je} \quad |x - x_1| < \delta_1(\varepsilon) \text{ i } |y - y_1| < \delta_2(\varepsilon)$$

t. j. ako apsolutnu veličinu razlike između vrijednosti funkcije z_1 u točki T_1 (x_1, y_1) i vrijednosti funkcije z u bilo kojoj susjednoj točki $T(x, y)$ možemo načiniti po volji malenom ($< \varepsilon$), čim $|x - x_1|$ i $|y - y_1|$ uzmemo dovoljno malenim ($< \delta$), pri čemu apsolutna vrijednost tih razlika ovisi o zadanom po volji malom pozitivnom broju ε (vidi sl. 60).



Sl. 60

Iz definicije neprekinutosti funkcije slijedi:

Funkcija $z = f(x, y)$, koja je neprekinuta obzirom na obje nezavisne promjenljive x i y, neprekinuta je i obzirom na svaku promjenljivu posebno, ali obrat toga stavka ne mora uvijek vrijediti.

Funkcija $z = f(x, y)$, neprekinuta u svakoj točki područja, u kojoj je definirana, zove se neprekinuta funkcija u tom području.

Rekli smo, da vrijednost funkcije

$$z = f(x, y)$$

možemo geometrijski predočiti kao aplikatu točke, kojoj su apscisa i ordinata nezavisne promjenljive x i y. Pojam »točke« kao cjelokupnost vrijednosti nezavisnih promjenljivih možemo prenijeti i na veći broj nezavisnih promjenljivih. Tako za funkcije od tri i četiri nezavisnih promjenljivih

$$u = f(x, y, z), \qquad v = F(x, y, z, t)$$

možemo kazati, da je u vrijednost prve funkcije u točki (x, y, z), a v — vrijednost druge funkcije u točki (x, y, z, t). U prvom slučaju možemo stvarno tu točku geometrijski predočiti obzirom na neki zadani trodimenzionalni koordinatni sustav kao točku u prostoru s koordinatama x, y, z, dok bi funkcija u spadala u četvrtu dimenziju; u drugom slučaju točku (x, y, z, t) ne možemo geometrijski predočiti, ali ipak možemo kazati, da je to točka četverodimenzionalnog prostora, razumijevajući pod tim prostorom cjelokupnost vrijednosti četiriju variabla (x, y, z, t), koji se sastoji od svih mogućih vrijednosti nezavisnih promjenljivih x, y, z, t. Prema tome, i neprekinutost funkcije triju i više nezavisnih promjenljivih možemo definirati na isti način, kako smo definirali neprekinutost funkcije dviju promjenljivih.

2. Plohe drugog reda

a) Općenito o plohama drugog reda

Znamo, da funkcija dviju nezavisnih promjenljivih $z = f(x, y)$ predočuje geometrijski plohu u prostoru. Možemo zamisliti bezbroj najrazličitijih funkcija dviju promjenljivih, a tim funkcijama odgovarale bi najrazličitije plohe. Međutim, postoji jedna vrsta ploha, koje imaju osobito značenje u teoretskoj fizici, mehanici, arhitekturi i t. d. To su plohe drugog reda, t. j. plohe, koje su u pravokutnom sustavu izražene jednadžbama drugog stepena obzirom na koordinate.

Znamo opću jednadžbu krivulja drugog reda, odnosno presjeka stošca

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

koja predočuje kružnicu, elipsu, hiperbolu i t. d. u ovisnosti od veličine i predznaka koeficijenata $A, B, C, D, E,$ i F.*)

*) Vidi od istog pisca Repetitorij elementarne matematike, IV. §.12. Tehnička knjiga, Zagreb, 1960.

Slično tome možemo napisati opću jednadžbu ploha drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0 \quad (62)$$

Ne ulazeći potanje u diskusiju o svim plohama, koje su implicitno predočene tom jednadžbom [vidi na pr. opću jednadžbu kugline plohe (61a)], promotrit ćemo samo najvažnije oblike tih ploha uzevši ih u položaju, kad se njihove ravnine simetrije podudaraju s koordinatnim ravninama.

S najjednostavnijim oblicima tih ploha i to s valjkastim plohama već smo se upoznali malo prije, a s rotacionim plohama u § 7, 7. drugog dijela ovog Repetitorija, gdje smo tom prilikom izveli jednadžbu kugline plohe, do koje smo malo prije došli na drugi način, i jednadžbe rotacionih paraboloida i hiperboloida. Naš je sada zadatak, da proučimo još neke nerotacione plohe drugog reda.

b) Troosni elipsoid

Izvedimo najprije jednadžbu rotacionog elipsoida rotirajući elipsu

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = f(x),$$

kojoj su poluosi a i c, oko osi X.

Prema formuli (90) (Dio II. § 7)

$$[f(x)]^2 = y^2 + z^2$$

dobijemo

$$\frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2) = y^2 + z^2 \mid : c^2$$

$$1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Odatle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{jednadžba rotacionog elipsoida (dvoosnog)} \quad (a)$$

Pomaknemo li svaku točku rotacionog elipsoida, koja je udaljena za y od ravnine XZ, za dužinu

$$y' = \frac{b}{c}y$$

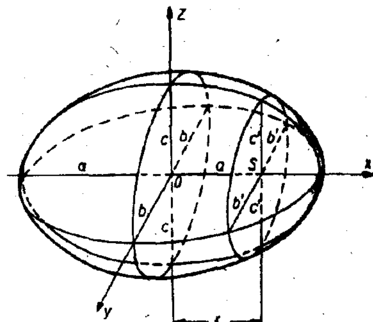
gdje je b neka dužina manja ili veća od c, t. j., drugim riječima, stisnemo li ili razvučemo rotacioni elipsoid u smjeru osi Y, tada ćemo jednadžbu te nove plohe dobiti tako, da u (a) uvrstimo $y = \frac{c}{b}y'$.

Dobijemo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{b^2}y'^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ili zamijenivši y' s y i skrativši c^2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (63)$$



Sl. 61

To je jednadžba troosnog elipsoida, kojemu su a, b i c poluosi. Vidi sliku 61.

Da upoznamo oblik te plohe, odredimo njene presjeke s koordinatnim ravninama XY, XZ i YZ. U tu svrhu uvrstimo u (63) jednadžbe tih ravnina: $z=0$, $y=0$ i $x=0$.

Dobijemo:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad ; \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Vidimo, da koordinatne ravnine sijeku troosni elipsoid u elipsama, kojima su poluosi a i b, a i c, b i c.

Promotrimo sada prijesjek troosnog elipsoida s ravninom $z=h$, t. j. s ravninom, koja je paralelna s ravninom XY, a udaljena od nje za h, gdje je $|h|<c$.

Uvrštenje $z=h$ u (63) daje

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \quad \Big| : \left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

a to je opet elipsa s poluosima $a'=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ i $b'=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ ili prostorno uzevši eliptični valjak, koji proicira promatrani prijesjek na ravninu XY.

Prema tome, svaka ravnina $z=h$, gdje je $|h|<c$, paralelna s ravninom XY, siječe troosni elipsoid u elipsi, čije se osi umanjuju s povećanjem $|h|$.

Na isti način može se pokazati, da su presjeci s ravninama $y=k$, gdje je $|k|<b$, koje su paralelne s ravninom XZ, i presjeci s ravninama $x=l$, gdje je $|l|<a$, koji su paralelni s ravninom YZ, također elipse.

Primjer.

Odredi tangentne ravnine na elipsoid

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$$

koje su paralelne s ravninom

$$x - 4y + 12z = 0$$

Kako ćemo kasnije vidjeti (vidi točku 5. ovog §) jednadžba tangentne ravnine na elipsoid u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ glasi:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

ili za naš slučaj

$$\frac{xx_1}{64} + \frac{yy_1}{36} + \frac{zz_1}{9} = 1 \qquad \text{(a)}$$

Zadatak se svodi, dakle, na određivanje koordinata dirališta, t. j. x_1, y_1 i z_1.

Diralište $T_1(x_1, y_1, z_1)$ leži na zadanom elipsoidu, dakle

$$\frac{x_1^2}{64} + \frac{y_1^2}{36} + \frac{z_1^2}{9} = 1 \qquad \text{(b)}$$

Znamo uvjet paralelnosti dviju ravnina (55):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

pa pomnoživši jednadžbu (a) s 576, t. j. napisavši je u obliku

$$9x_1 x + 16 y_1 y + 64 z_1 z - 576 = 0$$

dobijemo prema gornjoj formuli i obzirom na zadanu ravninu $x - 4y + 12z = 0$

$$\frac{9x_1}{1} = \frac{16y_1}{-4} = \frac{64z_1}{12}$$

ili

$$9x_1 = -4y_1 = \frac{16}{3} z_1$$

Odatle

$$x_1 = \frac{16}{27} z_1 \quad \text{i} \quad y_1 = -\frac{4}{3} z_1 \qquad \text{(c)}$$

Uvrštenje u (b) daje

$$\frac{1}{64}\left(\frac{16}{27} z_1\right)^2 + \frac{1}{36}\left(-\frac{4}{3} z_1\right)^2 + \frac{z_1^2}{9} = 1$$

Odatle

$$121 z_1^2 = 27^2$$

$$(z_1)_{1,2} = \pm \frac{27}{11}$$

Uvrštenje vrijednosti dobivenih za z_1 u (c) daje

$$(x_1)_{1,2} = \pm \frac{16}{11}$$

$$(y_1)_{1,2} = \mp \frac{36}{11}$$

Uvrstimo li izračunate koordinate dirališta tangentnih ravnina u (a), dobit ćemo tražene jednadžbe tih ravnina:

$$\underline{x - 4y + 12z - 44 = 0}$$

$$\underline{x - 4y + 12z + 44 = 0}$$

c) Dvokrilni troosni hiperboloid

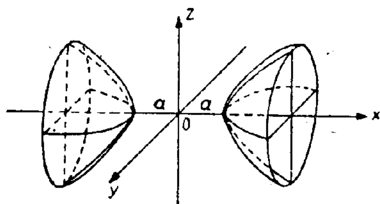
Rotiramo li hiperbolu s poluosima a i c : $y = \frac{a}{c}\sqrt{x^2 - a^2}$ oko osi X, dobit ćemo rotacioni dvokrilni hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{(a)}$$

(vidi Dio II. primjer na str. 210 i sl. 73).

Stisnemo li ili razvučemo tu plohu u smjeru osi Y, tada dobijemo troosni, dakle nerotacioni dvokrilni hiperboloid, kojemu je jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (64)$$



Sl. 62

Vidi sl. 62.

Tu jednadžbu dobijemo iz jednadžbe rotacionog hiperboloida na način prikazan pri izvodu jednadžbe troosnog elipsoida.

Načini taj izvod!

Presjeci s koordinatnim ravninama XY $(z = 0)$ i XZ $(y = 0)$ su hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dok presjeka s ravninom YZ nema (vidi sl. 62).

Presjeci s horizontalnim ravninama $z = h$ su hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} - \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$$

kojima su poluosi $\quad a' = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \quad$ i $\quad b' = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$

Isto tako su hiperbole presjeci dvokrilnog hiperboloida s ravninama $y = k$ paralelnim s ravninom XZ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)} = 1$$

Poluosi tih hiperbola su:

$$a' = a\sqrt{1 + \frac{k^2}{b^2}} \quad \text{i} \quad c' = c\sqrt{1 + \frac{k^2}{b^2}}$$

Međutim, presjeci s ravninama $x = l$ paralelnim s ravninom YZ su za $|l| > a$ elipse:

$$\frac{l^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ili

$$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{l^2}{a^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\frac{l^2}{a^2} - 1\right)} = 1$$

kojima su poluosi: $b' = b\sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 1}$ i $c' = c\sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 1}$

Za $|l| < a$ presjeka nema (vidi sl. 62).

Primjer

Odredi jednadžbe tangentnih ravnina na dvokrilni hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

koje odsjecaju jednake odreske na koordinatnim osima.

Prema (49) napišimo jednadžbe traženih tangentnih ravnina u segmentnom obliku

$$\frac{x}{d} + \frac{y}{d} + \frac{z}{d} = 1$$

ili

$$x + y + z = d \tag{a}$$

gdje je d odrezak (segment) na koordinatnim osima.

Zadatak se svodi na određivanje jedne nepoznanice d!

Kako ćemo kasnije vidjeti (vidi točku 5. ovog §), jednadžbu tangentne ravnine na dvokrilni hiperboloid u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ hiperboloida možemo napisati u obliku

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1 \tag{b}$$

Jednadžbe (a) i (b) su jednadžbe iste tangentne ravnine, dakle koeficijenti tih jednadžbi moraju biti proporcionalni, t. j.

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{1} = \frac{-\frac{y_1}{b^2}}{1} = \frac{-\frac{z_1}{c^2}}{1} = \frac{1}{d}$$

Odatle

$$x_1 = \frac{a^2}{d} \quad ; \quad y_1 = -\frac{b^2}{d} \quad ; \quad z_1 = -\frac{c^2}{d} \qquad \text{(c)}$$

Očito je, da diralište $T_1(x_1, y_1, z_1)$ leži na tangentnoj ravnini, pa uvrštenje (c) u (a) daje

$$\frac{a^2}{d} - \frac{b^2}{d} - \frac{c^2}{d} = d$$

Odatle je

$$d = \pm\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$$

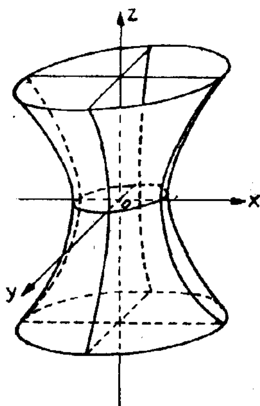
te tražene jednadžbe tangentnih ravnina prema (a) glase

$$\underline{x + y + z \mp \sqrt{a^2 - b^2 - c^2} = 0}$$

d) Jednokrilni troosni hiperboloid

Rotirajući hiperbolu oko osi Z dobijemo jednokrilni rotacioni hiperboloid (vidi Dio II, primjer na str. 210), a od te plohe prelazimo na način naveden pod b) i c) na troosni, t. j. nerotacioni jednokrilni hiperboloid, kojemu je jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (65)$$



Sl. 63

Vidi sl. 63.

(Pazi! Jednadžba dvokrilnog hiperboloida ima na lijevoj strani dva negativna člana, a jednokrilnog — samo jedan).

Prijesjek jednokrilnog hiperboloida s ravninom XY $(z = 0)$ jest elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Također su elipse presjeci te plohe s horizontalnim ravninama $z = h$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$$

pri čemu su za sve h

$$a' = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{i} \quad b' = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{poluosi tih elipsa.}$$

Presjeci s koordinatnim ravninama XZ i YZ ($y = 0$ i $x = 0$) su hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{i} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Također su hiperbole presjeci jednokrilnog hiperboloida s vertikalnim ravninama $x = l$, paralelnim s ravninom YZ:

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{a}$$

ili

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)}=1 \tag{b}$$

pri čemu su za $|l| < a$ realne poluosi tih hiperbola $b' = b\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}$ paralelne s osi Y, a imaginarne $c' = c\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}}$ paralelne s osi Z (sl. 63).

Međutim, za $|l| > a$ izraz pod korijenom postaje negativan $\left(1-\frac{l^2}{a^2} < 0\right)$, pa bi poluosi dobile imaginarnu vrijednost. Da dobijemo za osi realne vrijednosti, napišimo jednadžbu (b) u obliku:

$$-\frac{y^2}{b^2\left(\frac{l^2}{a^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{l^2}{a^2}-1\right)}=1$$

a to su opet hiperbole, koje su konjugirane prema pređašnjim, jer su njihove realne poluosi $c' = c\sqrt{\frac{l^2}{a^2}-1}$ paralelne s osi Z, a imaginarne $b' = b\sqrt{\frac{l^2}{a^2}-1}$ paralelne s osi Y (sl. 63).

Konačno za $l = a$, t. j. za $x = \pm a$ dobijemo prema (65):

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

ili

$$y = \pm\frac{b}{c}z$$

a to su projekcije u ravnini YZ dvaju pravaca, koji se sijeku u osi X i u kojim tangentne ravnine $x = \pm a$ sijeku hiperboloid.

U sličnim presjecima sijeku hiperboloid i ravnine $y = k$ paralelne s ravninom XZ, pri čemu i ravnine $y = \pm b$ tangiraju tu plohu i sijeku je istodobno svaka u dva pravca.

Jednadžbu troosnog jednokrilnog hiperboloida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

odnosno

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

možemo prikazati u parametarskom obliku rastavivši na faktore njenu lijevu i desnu stranu:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad \text{(a)}$$

Odatle

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}} = t$$

gdje je t zajednička vrijednost tih omjera, dakle, promjenljiva veličina ili **parametar**.

Odatle

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= t\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{t}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \qquad (66)$$

Dobili smo dvije linearne jednadžbe, koje za bilo koju po volji odabranu vrijednost parametra t predočuju, kako znamo, dvije ravnine u prostoru. Te ravnine sijeku se u jednom pravcu. Dajući parametru t sve moguće vrijednosti, dobit ćemo bezbroj pravaca ili, kako se kaže, familiju pravaca ovisnih o jednom parametru t. Uklonimo li parametar t iz tih jednadžbi, dobit ćemo jednadžbu hiperboloida. Pravci te familije leže, dakle, potpuno na hiperboloidu, oni su njegove izvodnice. Iz toga razloga se kaže, da je jednokrilni hiperboloid **pravčasta ploha**, jer su njegove izvodnice pravci, kao na pr. izvodnice valjkastih i stožastih ploha. Međutim, postoji bitna razlika između izvodnica hiperboloida i izvodnica valjka i stošca. Lako se može pomoću sustava (a) dokazati, da su izvodnice hiperboloida mimosmjerni pravci, t. j., pravci koji se ne sijeku, a nisu ni paralelni, dok su izvodnice valjka međusobno paralelni pravci, a izvodnice stošca sijeku se u jednoj točki.

Jednadžbu hiperboloida (a) možemo rastaviti u dvije linearne jednadžbe i na drugi način:

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}=\frac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}=u$$

gdje je u novi parametar

Odatle

$$\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=u\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{aligned} \qquad (67)$$

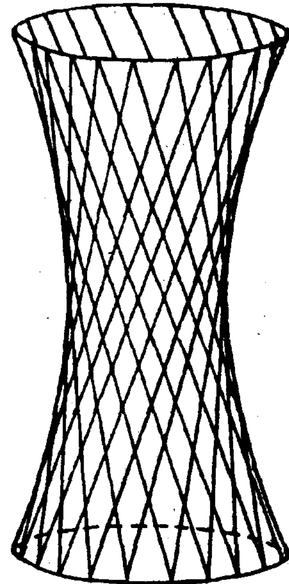
Taj sustav linearnih jednadžbi predočuje novu familiju pravaca, koji potpuno leže na hiperboloidu i čine nov sustav njegovih izvodnica, koje su također mimosmjerni pravci, pa se međusobno ne sijeku.

Međutim, dvije izvodnice, koje pripadaju različitim sustavima (66) i (67), uvijek se međusobno sijeku, t. j. čine par ukrštenih pravaca, jer pomoću jednadžbi (66) i (67) možemo svaku točku jednokrilnog hiperboloida prikazati kao funkciju parametara t i u:

$$\begin{aligned} x&=a\frac{tu+1}{t+u} \\ y&=b\frac{t-u}{t+u} \\ z&=c\frac{tu-1}{t+u} \end{aligned} \qquad (68)$$

To je jednadžba jednokrilnog hiperboloida u parametarskom obliku.

Prema tome: na jednokrilnom hiperboloidu ima dva sustava pravocrtnih izvodnica; dvije izvodnice jednog sustava ne sijeku se međusobno, dok svake dvije izvodnice različitih sustava uvijek se međusobno sijeku. (Vidi sl. 64).



Sl. 64

Primjeri

1. Odredi za hiperboloid

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

tangentne ravnine koje prolaze pravcem

$$\frac{x}{10}=\frac{y-9}{-99}=\frac{z}{-12}$$

Kako ćemo kasnije vidjeti (vidi točku 5. ovog §), jednadžba tangentne ravnine na jednokrilni hiperboloid glasi:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=1$$

gdje su x_1, y_1 i z_1 koordinate dirališta.

Za naš će slučaj tražena jednadžba tangentnih ravnina glasiti:

$$\frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{9} - \frac{zz_1}{16} = 1 \qquad \text{(a)}$$

Zadatak se svodi na određivanje koordinata dirališta x_1, y_1 i z_1. Tražene tangentne ravnine prolaze zadanim pravcem $\frac{x}{10} = \frac{y-9}{-99} = \frac{z}{-12}$, prolaze, dakle, i onom točkom (0, 9, 0), kojom prolazi taj pravac.

Uvrštenje u (a) daje:

$$0 + \frac{9y_1}{9} - 0 = 1$$

Odatle je

$$y_1 = 1$$

pa jednadžba (a) glasi sada:

$$\frac{xx_1}{4} + \frac{y}{9} - \frac{zz_1}{16} = 1 \qquad \text{(b)}$$

Tražene tangentne ravnine prolaze zadanim pravcem, dakle, su s njime paralelne, pa prema (57) imamo:

$$10 \cdot \frac{x_1}{4} + (-99) \cdot \frac{1}{9} + (-12) \cdot \left(-\frac{z_1}{16}\right) = 0$$

Odatle

$$10x_1 + 3z_1 = 44$$

$$z_1 = \frac{44 - 10x_1}{3} \qquad \text{(c)}$$

Diralište $(x_1, 1, z_1)$ leži na hiperboloidu, dakle

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{1}{9} - \frac{z_1^2}{16} = 1$$

Odatle

$$36\, x_1^2 - 9z_1^2 = 128 \qquad \text{(d)}$$

Uvrštenje (c) u (d) daje:

$$36x_1^2 - (44 - 10x_1)^2 = 128$$

ili

$$x_1^2 - \frac{55}{4}x_1 + \frac{129}{4} = 0$$

Odatle

$$(x_1)_{1,2} = \frac{55}{8} \pm \frac{31}{8}$$

Dakle

$$x_1 = \frac{43}{4} \quad ; \quad x_2 = 3 \qquad \text{(e)}$$

Iz (e) slijedi

$$z_1 = -\frac{127}{6} \quad ; \quad z_2 = \frac{14}{3}. \tag{f}$$

Uvrštenje (e) i (f) u (b) daje konačno jednadžbe traženih tangentnih ravnina:

$$\underline{774x + 32y + 381z - 288 = 0}$$

i

$$\underline{54x + 8y - 21z - 72 = 0}$$

2. Odredi pravocrtne izvodnice jednokrilnog hiperboloida

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$$

koje prolaze njegovom točkom $T_1\left(\frac{42}{5}, 1, 4\right)$.

Odredimo one vrijednosti parametara t i u, koje odgovaraju zadanoj točki T_1 hiperboloida. Uvrštenje $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$ i koordinate točke T_1 u (68) daje:

$$\frac{42}{5} = 6\frac{tu + 1}{t + u}$$

$$1 = 5\frac{t - u}{u + t}$$

$$4 = 4\frac{tu - 1}{t + u}$$

Iz prve jednadžbe računamo tu:

$$tu = \frac{7t + 7u - 5}{5}.$$

Uvrštenje te vrijednosti tu u treću jednadžbu daje

$$t + u = \frac{7t + 7u - 5}{5} - 1$$

ili nakon uređenja

$$t + u - 5 = 0 \tag{a}$$

Iz druge jednadžbe imamo:

$$t = \frac{3u}{2} \tag{b}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\frac{3u}{2} + u - 5 = 0$$

Odatle

$$u = 2$$

a sada iz (b) slijedi:

$$t = 3$$

Uvrštenje vrijednosti za a, b, c, t i u u jednadžbe (67) i (66) **daje jednadžbe traženih izvodnica** u obliku presjeka dvaju parova ravnina:

$$\frac{x}{6}+\frac{z}{4}=2\left(1+\frac{y}{5}\right)$$
$$\frac{x}{6}-\frac{z}{4}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{5}\right)$$

prva tražena izvodnica

$$\frac{x}{6}+\frac{z}{4}=3\left(1-\frac{y}{5}\right)$$
$$\frac{x}{6}-\frac{z}{4}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{y}{5}\right)$$

druga tražena izvodnica

ili

$$\begin{aligned}10x-24y+15z-120&=0\\10x+6y-15z-30&=0\end{aligned}\qquad (c)$$

$$\begin{aligned}10x+36y+15z-180&=0\\10x-4y-15z-20&=0\end{aligned}\qquad (d)$$

Da prikažemo pravac (d) u kanonskom obliku, zbrojimo jednadžbe (d), a zatim od prve jednadžbe oduzmimo drugu. Dobivamo:

$$\begin{aligned}20x+32y-200&=0\\40y+30z-160&=0\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}5x+8y-50&=0\\4y+3z-16&=0\end{aligned}$$

Iz tih jednadžbi računamo y:

$$y=\frac{-5x+50}{8}=\frac{x-10}{-\frac{8}{5}}$$

$$y=\frac{-3z+16}{4}=\frac{z-{}^{16}/_{3}}{-\frac{4}{3}}$$

Odatle

$$\frac{x-10}{-\frac{8}{5}}=\frac{y}{1}=\frac{z-{}^{16}/_{3}}{-\frac{4}{3}}\qquad /.-15$$

$$\frac{x-10}{24}=\frac{y}{-15}=\frac{z-\frac{16}{3}}{20}$$

To je kanonski oblik jednadžbe (d) tražene izvodnice.

Postupajući na isti način, dobijemo iz (c) kanonsku jednadžbu **druge tražene izvodnice**:

$$\frac{x-7{,}5}{9}=\frac{y}{10}=\frac{z-3}{10}$$

e) Eliptički paraboloid

Jednadžba eliptičkog paraboloida glasi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

(Obrati pažnju na to, da lijeva strana jednadžbe potječe od elipse, a desna od parabole).

Kako je lijeva strana jednadžbe uvijek pozitivna za bilo koje vrijednosti x i y, mora biti pozitivna i desna strana, t. j. uvijek je $z \geqslant 0$. Čitava ploha leži, dakle, iznad ravnine XY. Za $z = 0$ dobijemo $x = 0$ i $y = 0$. To znači, da eliptički paraboloid ima s ravninom XY samo jednu zajedničku točku i to ishodište O, u kojoj leži vrh plohe i u kojoj ravnina XY tangira paraboloid (sl. 65).

Horizontalne ravnine $z = h$, gdje je $h > 0$, sijeku paraboloid u elipsama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h \qquad / : 2h$$

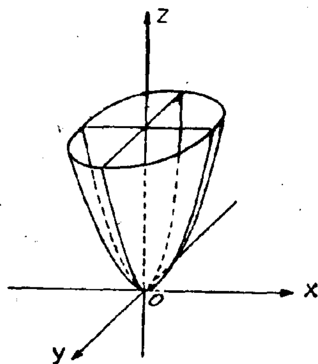
$$\frac{x^2}{a^2 \cdot 2h} + \frac{y^2}{b^2 \cdot 2h} = 1$$

kojima su poluosi $a' = a\sqrt{2h}$ i $b' = b\sqrt{2h}$.

Presjeci eliptičkog paraboloida s koordinatnim ravninama XZ $(y = 0)$ i YZ $(x = 0)$ su parabole s vrhovima u ishodištu:

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z \quad \text{ili} \quad x^2 = 2a^2z$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{ili} \quad y^2 = 2b^2z$$



Sl. 65

gdje su $2p = 2a^2$, odnosno $2p = 2b^2$ parametri tih parabola.

Presjeci te plohe s vertikalnim ravninama $y = k$ i $x = l$, koje su paralelne s ravninama XZ, odnosno YZ, također su parabole.

Na pr. presjeci s ravninama $y = k$ su parabole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 2z$$

Odatle

$$x^2 = a^2\left(2z - \frac{k^2}{b^2}\right)$$

ili

$$x^2 = 2a^2\left(z - \frac{k^2}{2b^2}\right)$$

pri čemu je parametar parabola $2p = 2a^2$ konstantan, dok kote vrhova tih parabola $\left(\frac{k^2}{2b^2}\right)$ rastu s povećanjem k, t. j. s povećanjem udaljenosti presječnih ravnina od ravnine XZ.

U sličnim parabolama sijeku eliptički paraboloid i ravnine $x = l$ paralelne s ravninom YZ.

Primjer

Odredi koordinate dirališta i jednadžbu tangentne ravnine za paraboloid

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$$

koja odsjeca jednake odreske na koordinatnim osima.

Kako ćemo kasnije vidjeti (vidi točku 5. ovog §), jednadžba tangentne ravnine na eliptički paraboloid glasi

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = z + z_1,$$

a za naš slučaj

$$\frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{9} = z + z_1 \qquad (a)$$

gdje su x_1, y_1 i z_1 tražene koordinate dirališta. U drugu ruku jednadžbu te tangentne ravnine možemo prema (49) napisati u segmentnom obliku:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{m} = 1 \qquad (b)$$

jer prema uvjetima zadatka tangentna ravnina odsjeca na koordinatnim osima jednake odreske.

Kako su jednadžbe (a) i (b) jednadžbe jedne te iste ravnine, izjednačimo njihove koeficijente prethodno pomnoživši, na pr. jednadžbu (b), s faktorom razmjernosti λ.

$$\frac{\lambda}{m} x + \frac{\lambda}{m} y + \frac{\lambda}{m} z = \lambda \qquad (c)$$

Izjednačenje koeficijenata jednadžbe (c) i jednadžbe (a) napisane u obliku

$$\frac{x_1}{4} x + \frac{y_1}{9} y - z = z_1$$

daje

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{x_1}{4}$$

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{y_1}{9}$$

$$\frac{\lambda}{m} = -1$$

$$\lambda = z_1$$

Iz treće jednakosti slijedi

$$\lambda = -m$$

pa iz prve i druge dobijemo:

$$x_1 = -4 \quad \text{i} \quad y_1 = -9$$

Uvrstimo li $x_1 = -4$, $y_1 = -9$ i $z = z_1$ u jednadžbu paraboloida, dobit ćemo:

$$\frac{16}{4} + \frac{81}{9} = 2z_1$$

a odatle je

$$z_1 = \frac{13}{2}$$

Uvrštenje koordinata dirališta $\left(-4, -9, \frac{13}{2}\right)$ u (a) daje traženu jednadžbu tangentne ravnine:

$$-x - y = z + \frac{13}{2}$$

ili

$$\underline{2x + 2y + 2z + 13 = 0}$$

f) Hiperbolni paraboloid ili sedlasta ploha

Jednadžba hiperbolnog paraboloida glasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{70}$$

kod čega primjetimo, da tu plohu ne možemo dobiti niti rastezanjem niti stiskanjem neke rotacione plohe.

(Obrati pažnju na to, da lijeva strana jednadžbe potječe od hiperbole, a desna od parabole).

Prijesjek paraboloida s ravninom $XY (z = 0)$ daje

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

odatle je

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{a}$$

a to su dva pravca u ravnini XY, koji su simetrični obzirom na os X (vidi u sl. 66 pravce AOB i COD).

Presjeci s horizontalnim ravninama $z = h$ su hiperbole, kojima su realne osi paralelne s osi X

$$\frac{x^2}{2a^2h} - \frac{y^2}{2b^2h} = 1$$

i kojima su poluosi $a' = a\sqrt{2h}$ i $b' = b\sqrt{2h}$ i to za $h > 0$. Za $h < 0$ dobijemo hiperbole, koje su konjugirane prema prvima:

$$-\frac{x^2}{2a^2h} + \frac{y^2}{2b^2h} = 1$$

gdje je $h = |h|$.

Njihove realne osi su paralelne s osi Y. Pravci (a) čine prijelaz od prve familije hiperbola prema drugoj familiji konjugiranih hiperbola i određuju smjer asimptota obiju familija hiperbola.

Prijesjek paraboloida s ravninom XZ $(y = 0)$ jest parabola

$$x^2 = 2a^2z$$

kojoj se os podudara s osi $+Z$ (parabola NOM u sl. 66).

Također je parabola prijesjek s ravninom YZ $(x = 0)$

$$y^2 = -2b^2z$$

kojoj se os podudara s osi $-Z$ (vidi parabolu POQ u sl. 66).

Isto tako su parabole i presjeci paraboloida s ravninama $y = k$, koje su paralelne s ravninom XZ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 2z$$

odatle

$$x^2 = 2a^2z + \frac{a^2k^2}{b^2}$$

ili

$$x^2 = 2a^2\left(z + \frac{k^2}{2b^2}\right)$$

Gornja jednadžba predočuje, naravno, projekcije tih presječnih parabola na ravninu XZ. Iz te jednadžbe vidimo, da se os tih parabola poklapa s osi Z, da su parabole otvorene prema gore i da se s povećanjem k njihovi vrhovi $\left(-\frac{k^2}{2b^2}\right)$ kreću prema dolje. Na isti način se vladaju i same presječne parabole, jer se projiciraju na ravninu XZ u pravoj veličini, pa se s povećanjem k njihovi vrhovi skližu po paraboli POQ prema dolje (vidi sl. 66), pri čemu su osi parabola paralelne s osi Z.

Konačno i ravnine $x = l$, koje su paralelne s ravninom YZ, sijeku paraboloid u parabolama.

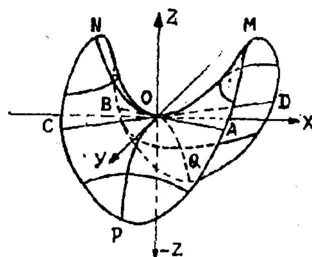
$$\frac{l^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

ili

$$y^2 = -2b^2z + \frac{b^2l^2}{a^2}$$

odatle

$$y^2 = -2b^2\left(z - \frac{l^2}{2a^2}\right)$$



Sl. 66

Iz te jednadžbe vidimo, da su osi tih parabola paralelne s osi Z, da su parabole otvorene prema dolje i da se s povećanjem l njihovi vrhovi skližu po paraboli NOM prema gore (vidi sl. 66).

Iz navedenog slijedi, da ploha ima sedlasti oblik i beskrajno se proteže u svim smjerovima.

Jednadžbu hiperbolnog paraboloida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

možemo napisati u obliku

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z \tag{a}$$

odatle

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{2} = \frac{z}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = t$$

gdje je t zajednička vrijednost tih omjera, t. j. parametar.

Odatle

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 2t \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \frac{z}{t} \end{aligned}\right| \tag{71}$$

Linearne jednadžbe (71) predočuju geometrijski dvije familije ravnina, koje čine svojim presjecištima familiju mimosmjernih pravaca. Ti pravci leže na paraboloidu, pa su njegove pravocrtne izvodnice. Primijetimo, da te pravocrtne izvodnice leže u paralelnim ravninama, koje su okomite na ravnini XY, jer u prvu jednadžbu sustava (71) ne ulazi promjenljiva z, a parametar t nalazi se u općem članu jednadžbe, i da druga jednadžba sustava (71) predočuje svežanj ravnina kroz ishodište O koordinatnog sustava.

Jednadžbu (a) paraboloida možemo rastaviti u dvije linearne jednadžbe i na drugi način:

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{2} = \frac{z}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{1}{u}$$

ili

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} = \frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{1}{u}$$

Odatle

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\frac{z}{u}\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=2u\end{aligned}\right| \qquad (72)$$

Dobili smo novu familiju ravnina, čiji međusobni presjeci čine novu familiju mimosmjernih pravaca, koji leže na paraboloidu, pa su njegove pravocrtne izvodnice. I ti su pravci presjeci paralelnih ravnina, okomitih na ravnini XY, sa svežnjem ravnina kroz ishodište koordinatnog sustava.

Riješimo li jednadžbe sustava (71) i (72) po promjenljivim x, y i z, dobit ćemo jednadžbu hiperbolnog paraboloida u parametarskom obliku.

$$\begin{aligned}x&=a(t+u)\\ y&=b(t-u)\\ z&=2tu\end{aligned} \qquad (73)$$

Iz navedenog slijedi, da je hiperbolni paraboloid, kao i jednokrilni hiperboloid, pravčasta ploha, koju čine dva sustava pravaca. Pravci jednog sustava se međusobno ne sijeku, dok se dva pravca različitih sustava uvijek međusobno sijeku tako, da svakom točkom paraboloida prolaze par njegovih pravocrtnih izvodnica.

Primjeri

1. Odredi tangentnu ravninu na hiperbolni paraboloid

$$16x^2 - 25y^2 = 800z$$

koja je paralelna s ravninom

$$8x - 5y - 20z = 0$$

Podijelivši jednadžbu zadanog paraboloida s 400, dobit ćemo je u obliku

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=2z$$

Kako jednadžba tangentne ravnine na hiperbolni paraboloid općenito glasi (vidi točku 5. ovog §)

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=z+z_1$$

a za naš slučaj

$$\frac{xx_1}{25}-\frac{yy_1}{16}=z+z_1 \qquad \text{(a)}$$

zadatak se svodi na određivanje koordinata dirališta (x_1, y_1, z_1). To diralište leži na paraboloidu, dakle

$$16x_1^2 - 25y_1^2 = 800z_1 \qquad \text{(b)}$$

Napisavši jednadžbu (a) tražene tangentne ravnine u obliku

$$16x_1x - 25y_1y - 400z - 400z_1 = 0$$

i uzevši u obzir, da je ta ravnina usporedna sa zadanom ravninom

$$8x - 5y - 20z = 0$$

dobijemo prema (55):

$$\frac{16x_1}{8} = \frac{-25y_1}{-5} = \frac{-400}{-20}$$

ili

$$2x_1 = 5y_1 = 20$$

Odatle

$$x_1 = 10$$
$$y_1 = 4 \qquad (c)$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$1600 - 400 = 800\, z_1$$

ili

$$8z_1 = 12$$

Odatle

$$z_1 = \frac{3}{2} \qquad (d)$$

Uvrstimo li (c) i (d) u (a), dobit ćemo nakon uređenja traženu jednadžbu tangentne ravnine u obliku:

$$\underline{\underline{8x - 5y - 20z - 30 = 0}}$$

2. Odredi pravocrtne izvodnice hiperbolnog paraboloida

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z.$$

koje prolaze točkom paraboloida $T_1(6, 3, ?)$

Uvrštenje $x_1 = 6$ i $y_1 = 3$ u jednadžbu paraboloida daje aplikatu zadane točke T_1 te plohe:

$$\frac{36}{4} - \frac{9}{9} = 2z$$

ili

$$9 - 1 = 2z$$

Odatle

$$z_1 = 4$$

Odredimo vrijednosti t_1 i u_1 parametara t i u, koje pripadaju zadanoj točki T_1 paraboloida. Uvrštenje $a = 2$, $b = 3$, $x_1 = 6$, $y_1 = 3$ i $z_1 = 4$ u (73) daje

$$6 = 2(t + u)$$
$$3 = 3(t - u)$$
$$4 = 2tu$$

Riješimo li prve dvije jednadžbe po t i u, dobit ćemo

$$t_1 = 2 \qquad i \qquad u_1 = 1$$

Te vrijednosti za t_1 i u_1, a također $a = 2$ i $b = 3$ uvrstimo u (71) i (72):

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 4\\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} &= \frac{z}{2}\end{aligned}\right| \qquad (a)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= \frac{z}{1}\\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} &= 2\end{aligned}\right| \qquad (b)$$

Jednadžbe (a) i (b) predočuju tražene izvodnice paraboloida zadane kao presjeke dva para ravnina.

Na način naveden u § 3, 2. c) izrazimo jednadžbe izvodnica u kanonskom obliku.

Iz prve jednadžbe sustava (a), koji napišemo u obliku:

$$3x + 2y - 24 = 0$$
$$3x - 2y - 3z = 0$$

slijedi

$$y = \frac{-3x + 24}{2} = \frac{x - 8}{-\frac{2}{3}} \qquad (c)$$

i

$$x = \frac{-2y + 24}{3}$$

Uvrštenje te vrijednosti za x u drugu jednadžbu daje:

$$-2y + 24 - 2y - 3z = 0$$

ili

$$-4y - 3z + 24 = 0$$

Odatle

$$y = \frac{-3z + 24}{4} = \frac{z - 8}{-\frac{4}{3}} \qquad (d)$$

Iz (c) i (d) imamo:

$$\frac{x - 8}{-\frac{2}{3}} = \frac{y}{1} = \frac{z - 8}{-\frac{4}{3}} \qquad /. -3$$

$$\frac{x - 8}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 8}{4}$$

To je jednadžba tražene izvodnice prve familije, koja prolazi zadanom točkom $T_1(6, 3, 4)$ paraboloida.

Postupajući na isti način s jednadžbama sustava (b), dobijemo jednadžbu izvodnice druge familije kroz istu točku T_1 paraboloida:

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z - 2}{2}$$

Često jednadžbe zadanih ploha dobijemo na najjednostavniji način pomoću stavaka vektorske algebre.

Navedimo dva primjera.

1. Treba napisati jednadžbu plohe stošca, kojemu je os pravac

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$$

vrh u ishodištu, a kut otvora na vrhu $2\alpha = 60°$ (sl. 67).

Osi stošca dodijelimo jedinični radijvektor $\vec{o}_0$. Znamo, da su komponente jediničnog vektora kosinusi njegova smjera, pa računamo prema jednadžbi zadanog pravca:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{2}{7} \; ; \quad \cos\beta = \frac{3}{7} \; ; \quad \cos\gamma = \frac{6}{7}$$

dakle

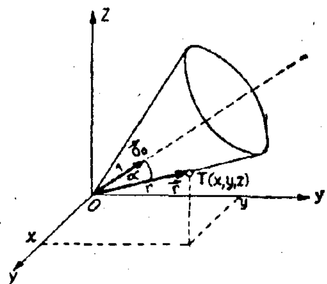
$$\vec{o}_0 = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

Isto tako dodijelimo točki $T(x, y, z)$, po volji odabranoj na plohi stošca, radijvektor $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Prema (19) i slici 67 imamo:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{o}_0\,\vec{r}}{1\cdot r}$$



Sl. 67

Odatle prema (18) i uzevši u obzir, da je $\alpha = 30°$, pa je $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dobijemo:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \Big|^2$$

$$\frac{3}{4} = \frac{(2x+3y+6z)^2}{49\,(x^2+y^2+z^2)}$$

ili nakon uređenja:

$$\underline{131x^2 + 111y^2 + 3z^2 - 48y - 49\,xz - 144yz = 0}$$

To je tražena jednadžba plohe stošca.

2. Treba napisati jednadžbu plohe kružnog valjka kojemu je os pravac

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$$

a polumjer $\rho = 3$ (sl. 68).

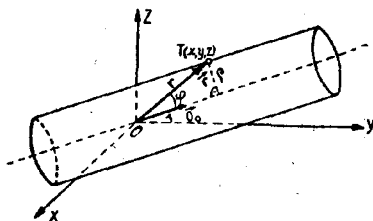
Opet dodijelimo osi zadane plohe jedinični radijvektor $\vec{o}_0$, a bilo kojoj točki $T(x, y, z)$ plohe radijvektor $\vec{r}$.

Iz jednadžbe zadanog pravca imamo: $\sqrt{1+25+4} = \sqrt{30}$, pa je

$$\vec{o}_0 = \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{k}$$

dok je

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Sl. 68

Iz slike 68 vidimo, da je

$$\rho = r \cdot \sin\varphi = r \cdot 1 \cdot \sin\varphi,$$

a to je prema (20) apsolutna vrijednost vektorskog produkta vektora $\vec{r}$ i $\vec{o}_0$, t. j.

$$\rho = |\vec{r} \times \vec{o}_0| \qquad (a)$$

Računamo prema (27a):

$$\vec{r} \times \vec{o}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\left[\vec{i}(2y-5z) - \vec{j}(2x-z) + \vec{k}(5x-y)\right]$$

Odatle prema (a) imamo:

$$3 = \sqrt{\frac{1}{30}\left[(2y-5z)^2 + (z-2x)^2 + (5x-y)^2\right]}$$

a nakon kvadriranja i uređenja

$$\underline{29x^2 + 5y^2 + 26z^2 - 10xy - 4xz - 20yz - 270 = 0}$$

To je tražena jednadžba plohe valjka.

3. Parcijalne derivacije funkcije dviju i više promjenljivih

Neka je zadana eksplicitna funkcija dviju promjenljivih $z = f(x, y)$. Budući da su x i y međusobno nezavisne promjenljive, možemo pretpostaviti, da se jedna promjenljiva, na pr. x, mijenja, dok se drugoj promjenljivoj y dade bilo koja konstantna vrijednost, ili da se y mijenja, dok x ostaje konstantan.

Granična vrijednost kvocijenta diferencija $\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$, kad Δx teži nuli bilo na koji način, t. j. limes kvocijenta prirasta Δz_x funkcije z, kad x poraste za Δx, dok se y ne mijenja, i prirasta Δx argumenta x, zove se **parcijalna (djelomična) derivacija funkcije** $z = f(x, y)$ po x i označuje se s $\frac{\partial z}{\partial x}$ ili $\frac{\partial f}{\partial x}$ ili z_x ili f_x.

Prema tome

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Isto tako definira se **parcijalna derivacija funkcije** $z = f(x, y)$ po y, kao limes kvocijenta diferencija $\frac{\Delta z_y}{\partial x}$, kad y dobije prirast Δy, koji teži nuli bilo na koji način, dok x ostaje konstantan, a označuje se s $\frac{\partial z}{\partial y}$ ili $\frac{\partial f}{\partial y}$ ili z_y ili f_y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Iz navedenog vidimo, da funkcija dviju nezavisnih promjenljivih ima **dvije** parcijalne derivacije: jednu po x, a drugu po y.

Pazi! Parcijalne derivacije označuju se pomoću okruglog ∂ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, dok uspravni d, kako znamo, služi za označivanje derivacija funkcije **jedne** promjenljive $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ i za označivanje diferencijala bilo koje funkcije.

Navedimo primjer.

Odredi obje parcijalne derivacije funkcije

$$z = 3x^2y^3 - 7x^3y^3 + 10x^2 - 3x + 8y^2 - 4y + 12$$

Da odredimo parcijalnu derivaciju z po x, derivirajmo zadanu funkciju po x, pri čemu smatramo da je y neka konstanta.

Dobijemo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^3 \cdot 2x - 7y^3 \cdot 3x^2 + 20x - 3$$

(posljednja su tri člana funkcije otpala pri deriviranju po x, jer su konstante!)

ili

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 - 21x^2y^3 + 20x - 3}$$

Sada parcijalno derivirajmo zadanu funkciju po y, u tom je slučaju x konstanta.

Dobijemo:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot 3y^2 - 7x^3 \cdot 3y^2 + 0 - 0 + 16y - 4$$

ili

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 21x^3y^2 + 16y - 4}$$

Traže li se vrijednosti parcijalnih derivacija zadane funkcije u nekoj posebnoj zadanoj točki (x_1, y_1), treba najprije izračunati parcijalne derivacije te funkcije, a zatim uvrstiti u dobivene izraze koordinate x_1 i y_1 zadane točke.

Na pr., u točki $T_1(2; 3)$ parcijalne derivacije funkcije navedene u našem primjeru imaju vrijednosti:

$$\underline{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1} = 6 \cdot 2 \cdot 27 - 21 \cdot 4 \cdot 27 + 20 \cdot 2 - 3 = \underline{-1907}$$

$$\underline{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1} = 9 \cdot 4 \cdot 9 - 21 \cdot 8 \cdot 9 + 16 \cdot 3 - 4 = \underline{-1144}$$

Pokazali smo, da tražeći parcijalnu derivaciju po x funkcije $z = f(x, y)$ u nekoj točki $T(x, y)$, t. j. tražeći

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

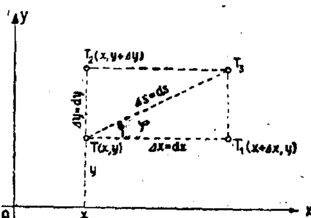
dajemo x prirast Δx, dok y ne mijenjamo. Na sličnì način definirano

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Geometrijski to znači, kako se vidi iz slike 69, koja prikazuje samo ravninu argumenata x i y, da kad tražimo $\frac{\partial z}{\partial x}$ točku T pomičemo paralelno s osi X za odrezak $TT_1 = \Delta x$ u položaj $T_1(x + \Delta x, y)$, a kad tražimo $\frac{\partial z}{\partial y}$, pomičemo točku T paralelno s osi Y za $TT_2 = \Delta y$ paralelno s osi Y u točku $T_2(x, y + \Delta y)$, pri čemu u prvom slučaju točka T_1 teži točki T, idući po pravcu T_1T, koji je paralelan s osi X, dok u drugom slučaju točka T_2 teži točki T idući po pravcu T_2T, koji je paralelan s osi Y. Stoga se kaže, da je $\frac{\partial z}{\partial x}$ parcijalna derivacija funkcije $z = f(x, y)$ u smjeru osi X, dok je $\frac{\partial z}{\partial y}$ parcijalna derivacija te funkcije u smjeru osi Y.

Jasno je, da možemo definirati i parcijalnu derivaciju funkcije z u ma kojem smjeru s, koji je određen kutom φ (vidi sl. 69), ako pomaknemo točku T u točku T_3, udaljenu od točke T za $TT_3 = \Delta s$, i ako $TT_3 = \Delta s$ teži nuli. Tada je $\frac{dz}{ds}$ derivacija funkcije $z = f(x, y)$ u točki T u smjeru $s(\varphi)$.

Izvedimo izraz za tu derivaciju $\frac{dz}{ds}$.



Sl. 69

Malo kasnije uvest ćemo pojam totalnog diferencijala dz funkcije $z = f(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

[vidi dalje formulu (80)].

Podijelimo li dz s ds, dobijemo:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}$$

Prema slici:
$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$

Uvrštenje daje

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi$$

To je izraz za derivaciju funkcije $z = f(x, y)$ u smjeru s (φ). Potanko o derivaciji u smjeru s (φ) vidi dalje § 13, 1.

Na isti način definiramo, označujemo i računamo parcijalne derivacije funkcije triju i više nezavisnih promjenljivih.

Uzmimo na pr., funkciju u triju promjenljivih x, y, z:

$$u = 5x^2 \sin y - 2 \sin x \operatorname{tg} y \cos z + 4a^z \operatorname{arc tg} z$$

Računamo:

1. $\frac{\partial u}{\partial x}$ smatrajući da su y i z konstante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10x \sin y - 2\cos x \operatorname{tg} y \cos z + 4a^x \ln a \operatorname{arc tg} z$$

2. $\frac{\partial u}{\partial y}$ smatrajući da su x i z konstante:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 \cos y - 2\sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \cos z + 0$$

3. $\frac{\partial u}{\partial z}$ smatrajući da su x i y konstante.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + 2\sin x \operatorname{tg} y \sin z + 4a^x \cdot \frac{1}{1 + z^2}$$

Vidimo, da funkcija triju promjenljivih ima tri parcijalne derivacije. Očito je, da će funkcija od n promjenljivih imati n parcijalnih derivacija.

Parcijalne derivacije složenih funkcija dviju i više promjenljivih računaju se po istim pravilima kao i obične derivacije složenih funkcija jedne promjenljive (vidi Dio I § 9, 8), treba samo uvijek držati na pameti, da su sve promjenljive konstantne osim one po kojoj deriviramo, pa primjenjivati one formule deriviranja, koje odgovaraju tom posebnom slučaju.

Primjeri

Odredi parcijalne derivacije funkcija.

1. $z = \operatorname{arc tg} \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\underline{\frac{y}{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x + \frac{y^2}{x}} = \underline{\frac{x}{x^2 + y^2}}$$

2. $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{y \cdot x^{y-1}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{x^y \cdot \ln x}$$

3. $$z = \frac{e^{xy}}{e^x + e^y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(e^x + e^y) \cdot e^{xy} \cdot y - e^{xy} \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} = \underline{\frac{e^{xy}(ye^x + y\,e^y - e^x)}{(e^x + e^y)^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(e^x + e^y) \cdot e^{xy} \cdot x - e^{xy} \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2} = \underline{\frac{e^{xy}(xe^x + x\,e^y - e^y)}{(e^x + e^y)^2}}$$

4. $$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \underline{\frac{x}{u}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \underline{\frac{y}{u}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \underline{\frac{z}{u}}$$

5. $$u = x^{yz} + y^{xz} + z^{xy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz \cdot x^{yz-1} + y^{xz} \cdot \ln y \cdot z + z^{xy} \cdot \ln z \cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z + xz \cdot y^{xz-1} + z^{xy} \cdot \ln z \cdot x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y + y^{xz} \ln y \cdot x + xy \cdot z^{xy-1}$$

6. Izračunaj za funkciju

$$z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{u točki} \quad x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1 + \sin x + \sin y)(\cos y + y \sin x) - (x \cos y - y \cos x) \cos x}{(1 + \sin x + \sin y)^2}$$

Uvrštenje $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$ daje $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \underline{1}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1 + \sin x + \sin y)(- x \sin y - \cos x) - (x \cos y - y \cos x) \cos y}{(1 + \sin x + \sin y)^2}$$

Uvrštenje $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$ daje: $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = \underline{-1}$

7. Odredi $\frac{\partial u}{\partial \psi}$ za funkciju $u = \frac{\cos(\varphi - 2\psi)}{\cos(\psi + 2\varphi)}$ u točki $\varphi_0 = \pi$; $\psi_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{+ 2 \cos(\psi + 2\varphi) \sin(\varphi - 2\psi) + \cos(\varphi - 2\psi) \sin(\psi + 2\varphi)}{\cos^2(\psi + 2\varphi)}$$

Uvrštenje $\varphi_0 = \pi$ i $\psi_0 = \frac{\pi}{4}$ daje

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_0 = \frac{2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot\frac{2}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

4. Geometrijsko značenje parcijalnih derivacija funkcije dviju promjenljivih

Pretpostavimo, da smo izračunali obje parcijalne derivacije funkcije $z = f(x, y)$ u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$. Pokažimo geometrijsko značenje tih parcijalnih derivacija.

Kad smo funkciju $z = f(x, y)$ parcijalno derivirali po x, smatrali smo da je $y = y_1$ (konstanta).

Znamo da $y = y_1$ predočuje ravninu, koja je paralelna s ravninom XZ i udaljena od nje za y_1. Ta ravnina E_1 (vidi sl. 70) siječe plohu, koja je geometrijska predodžba zadane funkcije $z = f(x, y)$, u krivulji AT_1B.

Kako je funkcija z za $y = y_1$ (konstanta) funkcija jedne promjenljive x, predočuje $\frac{\partial z}{\partial x}$ u ravnini E_1 gradijent tangente povučene na tu presječnu krivulju AT_1B u točki T_1, t. j. tangens kuta što ga tangenta t_1 zatvara s osi $+X$, odnosno s pravcem $y = y_1$ paralelnim s osi X:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha_1 \tag{74}$$

Na isti način, kad deriviramo funkciju z po y, smatramo da je $x = x_1$ (konstanta). Ravnina $x = x_1$, koja je paralelna s ravninom YZ, a udaljena od nje za x_1 (ravnina E_2 u slici 70), siječe plohu z u krivulji CT_1D, pa je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = tg\,\beta_2 \tag{74a}$$

t. j. $\frac{\partial z}{\partial y}$ je tangens kuta što ga tangenta t_2 na tu presječnu krivulju u točki T_1 zatvara s $+$ osi Y, odnosno s pravcem $x = x_1$, paralelnim s osi Y.

Iz analitičkog i geometrijskog značenja parcijalnih derivacija jasno slijedi, da parcijalno derivirajući zadanu funkciju $z = f(x, y)$ u nekoj točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ funkcije, mi tu funkciju deriviramo idući samo u smjeru osi X, a parcijalno derivirajući funkciju po y deriviramo je u smjeru osi Y.

Tangente t_1 i t_2, koje se sijeku u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe $z = f(x, y)$, određuju tangentnu ravninu na tu plohu u toj točki T_1.

Pretpostavimo, da su te tangente t_1 i t_2 horizontalne, t. j. paralelne s ravninom XY. U tom slučaju određuju te dvije tangente horizontalnu tangentnu ravninu na plohu, pri čemu je

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 = tg\, \alpha_1 = tg\, 0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1 = tg\, \beta_2 = tg\, 180° = 0$$

jer je tangenta t_1 paralelna s osi X, a tangenta t_2 s osi Y.

Prema tome je u točkama plohe $z = f(x, y)$, u kojima je $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, tangentna ravnina horizontalna.

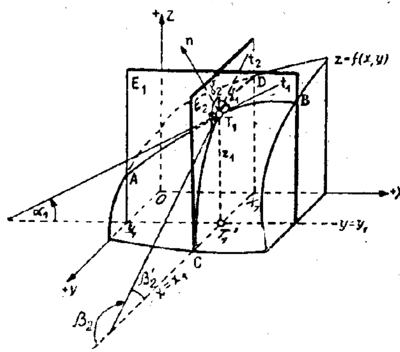
Primjer

Ravnina

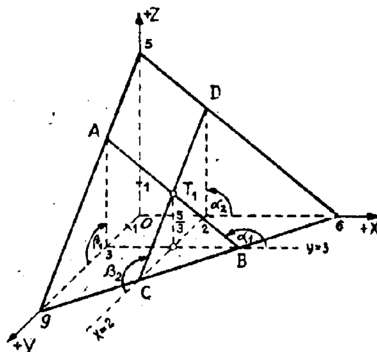
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{z}{5} = 1$$

presječena je ravninama $y = 3$ i $x = 2$.

Odredi kutove, što ih ti presjeci zatvaraju s pozitivnim smislom koordinatnih osi X i Y (sl. 71).



Sl. 70



Sl. 71

Budući da su presjeci AB i CD pravci i da je ravnina $y = 3$ paralelna s ravninom XZ, dok je ravnina $x = 2$ paralelna s ravninom YZ, iz geometrijskog značenja parcijalnih derivacija slijedi, da su parcijalne derivacije zadane funkcije gradijenti tih presjeka u tim presječenim ravninama, t. j.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\, \alpha_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = tg\, \beta_2$$

Napisavši jednadžbu zadane ravnine u eksplicitnom obliku

$$z = 5\left(1 - \frac{x}{6} - \frac{y}{9}\right)$$

računamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{5}{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{5}{9}$$

Dakle je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha_1 = -\frac{5}{6} = -0{,}833$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = tg\,\beta_2 = -\frac{5}{9} = -0{,}555$$

Odatle

$$\underline{\alpha_1 = 180^\circ - 39^\circ 50' = 140^\circ 10'}$$

$$\underline{\beta_2 = 180^\circ - 29^\circ 00' = 151^\circ 00'}$$

Kako je os Y okomita na ravnini $y = 3$, u kojoj leži presjek AB, a os X okomita na ravnini $x = 2$, u kojoj leži presjek CD, bit će

$$\beta_1 = 90^\circ$$
$$\alpha_2 = 90^\circ$$

Do istih rezultata dolazimo, ako uzmemo u obzir da su presjeci AB i CD paralelni s pravcima, u kojima zadana ravnina siječe koordinatne ravnine XZ i YZ.

5. Jednadžbe tangentne ravnine i normale na plohu $z = f(x, y)$ u zadanoj točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe

Geometrijsko značenje parcijalnih derivacija $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ daje mogućnost lakog izvođenja jednadžbe tangentne ravnine na plohu $z = f(x, y)$.

Tangentna ravnina prolazi diralištem $T_1(x_1, y_1, z_1)$, pa njena jednadžba prema (50a) glasi:

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + (z - z_1) = 0 \qquad (a)$$

Imamo odrediti dvije nepoznanice A_1 i B_1.

Tangenta t_1 leži u tangentnoj ravnini, pa je s njome paralelna, a uvjet paralelnosti pravca i ravnine znamo, te prema (57) imamo:

$$A_1 a + B_1 b + 1 \cdot c = 0 \qquad (b)$$

gdje su a, b i c koeficijenti, odnosno kosinusi smjera tangente t_1.

Pokazali smo, da je $tg\,\alpha_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$ (74), a odatle po poznatoj trigonometrijskoj formuli (Vidi Repet. elem. matematike, III, § 4) imamo:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}$$

Iz slike 70 vidimo dalje; da tangenta t_1 zatvara s osi $+Y$ kut $\beta_1 = 90^\circ$, jer leži u ravnini $E_1 \parallel XZ$, pa je $\cos\beta_1 = \cos 90^\circ = 0$. Isto tako se vidi, da ta tan-

genta zatvara s osi $+Z$, odnosno s njoj paralelnim pravcem $T_1T'_1$ kut $\gamma_1 = 90° - \alpha_1$, pa je

$$\cos\gamma_1 = \cos(90° - \alpha_1) = \sin\alpha_1 = \frac{tg\alpha_1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_1}} = \text{prema (74)} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}$$

Uvrštenje

$$a = \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}, \quad b = \cos\beta_1 = 0 \text{ i } c = \cos\gamma_1 = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}$$

u (b) daje

$$A_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} + \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} = 0$$

a odatle je

$$A_1 = -\frac{\partial z}{\partial x} \tag{c}$$

Na isti način dobijemo prema slici 70 slijedeće vrijednosti za kosinuse smjera tangente t_2:

$$a = \cos\alpha_2 = \cos 90° = 0,$$

jer je $E_2 \parallel YZ$

$$b = \cos\beta_2 = \cos(180° - \beta_2) = -\cos\beta'_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\beta_2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

jer je prema (74a) $tg\,\beta'_2 = -\frac{\partial z}{\partial y}$

$$c = \cos\gamma_2 = \cos(90° + \beta'_2) = -\sin\beta'_2 = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$-B_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = 0$$

Odatle je

$$B_1 = -\frac{\partial z}{\partial y} \tag{d}$$

Uvrštenje (c) i (d) u (a) daje

$$-\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_1)-\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_1)+(z-z_1)=0$$

ili

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1(x-x_1)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1(y-y_1)=z-z_1 \tag{75}$$

To je **jednadžba tangentne ravnine na plohu** $z=f(x, y)$ **u točki** $T_1(x_1, y_1, z_1)$, gdje su $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1$ i $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1$ vrijednosti parcijalnih derivacija, u koje su uvrštene koordinate dirališta. Indeksi »1« uz parcijalne derivacije pokazuju, da su parcijalne derivacije uzete u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$.

Upotrebivši Gaussove oznake $\frac{\partial z}{\partial x}=p$ i $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, (odnosno p_1 i q_1 u točki T_1) jednadžba tangentne ravnine glasi:

$$(x-x_1)p_1+(y-y_1)q_1=z-z_1 \tag{75a}$$

Malo kasnije ćemo pokazati (vidi točku 11 ovog §) da **jednadžba tangentne ravnine na plohu zadanu implicitno** $F(x, y, z)=0$ **u točki** $T_1(x_1, y_1, z_1)$ **glasi:**

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1(x-x_1)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1(y-y_1)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1(z-z_1)=0 \tag{76}$$

Indeksi »1« uz parcijalne derivacije kazuju, da vrijednosti tih derivacija treba uzeti u diralištu $T_1(x_1, y_1, z_1)$.

Izvedimo sada jednadžbu normale na plohu $z=f(x, y)$ u istoj točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe, t. j. jednadžbu pravca n, koji je okomit na tangentnoj ravnini u toj točki T_1 (vidi sl. 70).

Normala prolazi točkom $T_1(x_1, y_1, z_1)$, pa njena jednadžba prema (38) glasi:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

ili, podijelivši sve nazivnike s c i označivši $\frac{a}{c}$ s a_1, a $\frac{b}{c}$ s b_1, dobijemo

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{1} \tag{a}$$

Treba, dakle, odrediti samo a_1 i b_1.

Normala je okomita na tangentnoj ravnini

$$(x-x_1)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_1)\frac{\partial z}{\partial y}-(z-z_1)=0$$

pa prema poznatom nam uvjetu (58) okomitosti pravca i ravnine

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C},$$

za naš slučaj imamo:

$$\frac{a_1}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{b_1}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{1}{-1}$$

Odatle
$$a_1 = -\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$b_1 = -\frac{\partial z}{\partial y}$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1} = \frac{z - z_1}{-1} \tag{77}$$

To je jednadžba normale na plohu $z = f(x, y)$ u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe, gdje su $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1$ i $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1$ vrijednosti parcijalnih derivacija u diralištu T_1.

Ista jednadžba uz Gaussove oznake glasi:

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{-1} \tag{77a}$$

gdje je $p_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1$ i $q_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1$

Na plohu zadanu implicitno $F(x, y, z) = 0$ jednadžba normale u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ glasi:

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1} \tag{78}$$

(vidi dalje točku 11 ovog §).

Primjeri

1. Odredi jednadžbu tangentne ravnine i normale na troosni elipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ elipsoida (sl. 61).

Najjednostavnije odredimo jednadžbu tangentne ravnine primijenivši formulu (76).

U tu svrhu napišemo jednadžbu elipsoida u implicitnom obliku:

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

pa računamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

a u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = \frac{2x_1}{a^2}; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = \frac{2y_1}{b^2}; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = \frac{2z_1}{c^2} \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u (76) daje

$$(x - x_1)\frac{2x_1}{a^2} + (y - y_1)\frac{2y_1}{b^2} + (z - z_1)\frac{2z_1}{c^2} = 0$$

Odatle

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}$$

ili

$$\underline{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1}$$

jer uvrštenje koordinata (x_1, y_1, z_1) točke T_1 elipsoida u njegovu jednadžbu daje

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

Uvrstimo li jednakosti (a) u (78), dobit ćemo jednadžbu normale u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ elipsoida.

$$\frac{x - x_1}{\frac{2x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{2y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{2z_1}{c^2}}$$

ili

$$\underline{\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}}}$$

2. Odredi jednadžbu tangentne ravnine na eliptički paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ paraboloida.

Napisavši jednadžbu paraboloida u implicitnom obliku

$$F(x, y, z)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$$

računamo prema (76):

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2};\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2};\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=-2$$

a u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ paraboloida

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1=\frac{2x_1}{a^2};\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1=\frac{2y_1}{b^2};\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1=-2$$

Uvrštenje u (76) daje:

$$(x-x_1)\frac{2x_1}{a^2}+(y-y_1)\frac{2y_1}{b^2}-2(z-z_1)=0$$

ili

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+z-z_1$$

a kako iz jednadžbe paraboloida slijedi da je $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=2z_1$, dobijemo

$$\underline{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=z+z_1}$$

Dokaži na isti način, da jednadžbe tangentnih ravnina u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ glase:

za dvokrilni troosni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

$$\underline{\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=1}$$

za jednokrilni troosni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

$$\underline{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=1}$$

za hiperbolni paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$,

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = z + z_1$$

Navedimo još jedan primjer.

Napiši jednadžbe normala u sjecištu ploha

$$z = x^2 + y^2$$
$$z = x + y + 4$$
$$y = x$$

Iz zadanih jednadžbi razabiremo, da je prva ploha rotacioni paraboloid nastao rotacijom parabole $x^2 = z$, odnosno $x = \sqrt{z}$ oko osi Z (vidi Dio II. § 7, 7), dok su druge dvije plohe ravnine (nariši sliku ploha!).

Odredimo pravac, u kojem se sijeku te ravnine.

Uvrštenje $y = x$ i $x = y$ u $z = x + y + 4$ daje

$$\left.\begin{aligned} z &= 2x + 4 \\ z &= 2y + 4 \end{aligned}\right| \quad \text{sjecište zadanih ravnina}$$

ili u parametarskom obliku

$$\left.\begin{aligned} z &= t \\ x &= \frac{1}{2}t - 2 \\ y &= \frac{1}{2}t - 2 \end{aligned}\right| \qquad \text{(a)}$$

Da odredimo koordinate točaka, u kojima taj pravac probada zadani paraboloid, t. j. da odredimo sjecište zadanih ploha, uvrstimo jednadžbe (a) u jednadžbu paraboloida $z = x^2 + y^2$. Na taj način dobit ćemo one vrijednosti parametra t, koje odgovaraju traženim probodištima.

Uvrštenje daje:

$$t = 2\left(\frac{1}{2}t - 2\right)^2$$

Odatle:

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

i

$$t_1 = 8 \quad ; \quad t_2 = 2$$

pa iz (a) dobijemo koordinate traženih probodišta:

$$P_1(2, 2, 8) \quad ; \quad P_2(-1, -1, 2).$$

Prema (78) računamo jednadžbe normala na paraboloid $x^2 + y^2 - z = 0$ u točkama P_1 i P_2.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

a u točkama P_1 i P_2:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = 4 \quad ; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = 4 \quad ; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 = -1$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_2 = -2 \quad ; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2 = -2 \quad ; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_2 = -1$$

Jednadžbe traženih normala glase prema (78):

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-8}{-1} \quad ; \quad \frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$$

6. Parcijalne derivacije viših redova

Kako su redovito parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ funkcije $z=f(x, y)$ opet funkcije od x i y, svaku parcijalnu derivaciju možemo opet derivirati po x i po y, pa tako dobijemo četiri druge parcijalne derivacije funkcije $z=f(x, y)$ ili četiri parcijalne derivacije drugog reda.

Parcijalna derivacija $\frac{\partial z}{\partial x}$ po x označuje se slično drugoj derivaciji funkcije jedne promjenljive s $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ili $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ili z_{xx} ili f_{xx}, a derivacija po y s $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ili $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ili z_{xy} ili f_{xy}.

Na slični način označuju se parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial y}$:

po x s $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ili z_{yx} ili f_{yx};

po y s $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ili z_{yy} ili f_{yy}.

Malo prije u točki 3. izračunali smo prve parcijalne derivacije funkcije

$$z = 3x^2y^3 - 7x^3y^3 + 10x^2 - 3x + 8y^2 - 4y + 12$$

pa smo dobili:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 - 21x^2y^3 + 20x - 3 \tag{a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 21x^3y^2 + 16y - 4 \tag{b}$$

(a) deriviramo parcijalno po x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y^3 - 42xy^3 + 20$$

(a) opet deriviramo, ali sada parcijalno po y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 18xy^2 - 63x^2y^2$$

(b) deriviramo parcijalno po x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 18xy^2 - 63x^2y^2$$

(b) deriviramo parcijalno po y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 18x^2y - 42x^3y + 16$$

Kako vidimo, dobili smo ukupno četiri druge parcijalne derivacije zadane funkcije dviju promjenljivih, ali opažamo, da smo za dvije druge parcijalne derivacije dobili identične izraze: $18xy^2 - 63x^2y^2$, t. j.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \quad \text{ili} \quad z_{xy} = z_{yx} \tag{79}$$

To znači: deriviramo li funkciju prvo po x, a zatim po y, ili prvo po y, a zatim po x, dobit ćemo u oba slučaja isti rezultat. Drugim riječima redoslijed deriviranja ne utječe na rezultat deriviranja.

Može se općenito pokazati: ako funkcija $z = f(x, y)$ ima parcijalne derivacije z_x i z_y i drugu parcijalnu derivaciju z_{xy}, koja je neprekinuta u točki (x, y), tada ona ima u toj točki i drugu derivaciju z_{yx}, koja je identična prvoj.

Iz toga zaključujemo, da uz navedene uvjete funkcija $z = f(x, y)$ ima samo tri različite druge parcijalne derivacije.

Navedimo primjer.

Pokaži da za funkciju

$$z = arc\, tg\, \frac{x}{y}$$

vrijedi jednakost

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

Računamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y + \frac{x^2}{y}} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{(x^2 + y^2)\, 1 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \underline{\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{x}{y^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -\frac{(x^2 + y^2) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \underline{\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}}$$

Pokaži da jednakost $z_{xy} = z_{yx}$ vrijedi za funkcije:

1. $z = y\, ln(1 + xy)$
2. $z = e^x(cos\, y + x\, sin\, y)$

Kako su druge parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ funkcije $z = f(x, y)$ redovito opet funkcije od x i y, svaku drugu parcijalnu derivaciju možemo opet derivirati po x i y, pa tako dobijemo ukupno 6 trećih parcijalnih derivacija funkcije $z = f(x, y)$.

Njihova je oznaka slična oznaci drugih parcijalnih derivacija, kako se to vidi iz sheme, koja slijedi.

Deriviramo po	x	y
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}$	$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z_{xxx}$	$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = z_{xxy}$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = z_{xy}$	$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = z_{xxy}$	$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = z_{xyy}$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}$	$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = z_{yyx}$	$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z_{yyy}$

Uz pretpostavku, da za zadanu funkciju $z = f(x, y)$ redoslijed deriviranja ne utječe na rezultat, ima funkcija dviju promjenljivih samo četiri različite treće parcijalne derivacije, i to

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Slično se označuju i parcijalne derivacije četvrtog i viših redova.

Na navedeni način označuju se i računaju parcijalne derivacije viših redova funkcije triju i više promjenljivih.

Na pr., treba izračunati treću parcijalnu derivaciju po x, y i z, t. j. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$ funkcije $u = e^{xyz}$

Deriviramo u po x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz} \cdot yz$$

Rezultat deriviramo po y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = e^{xyz} \cdot z + yz \cdot e^{xyz} \cdot xz = e^{xyz}(z + xyz^2)$$

Rezultat deriviramo po z:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = e^{xyz}(1 + 2xyz) + (z + xyz^2)\, e^{xyz} \cdot xy =$$

$$= e^{xyz}(1 + 2\,xyz + xyz + x^2y^2z^2) = \underline{e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)}$$

Pokaži

1. da za funkciju $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ vrijedi jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

2. da je za funkciju $u = y^2 z^2 e^{\frac{x}{2}} + z^2 x^2 e^{\frac{y}{2}} + x^2 y^2 e^{\frac{z}{2}}$

parcijalna derivacija $\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} = e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{y}{2}} + e^{\frac{z}{2}}$

7. Totalni diferencijal funkcije i njegova primjena

Znamo, da je diferencijal funkcije jedne promjenljive $y = f(x)$ jednak derivaciji funkcije pomnoženoj s diferencijalom argumenta, t j. $dy = f(x) \cdot dx$ (vidi Dio II. § 1).

Funkcija dviju promjenljivih $z = f(x, y)$ ima dvije parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, dakle ima i dva parcijalna diferencijala $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$ i $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$.

Totalni ili potpuni diferencijal dz funkcije $z = f(x, y)$ je zbroj njenih parcijalnih diferencijala:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{80}$$

(Pazi, diferencijal se uvijek označuje pomoću latinskog d).

Znamo, da diferencijal dy funkcije jedne promjenljive $y = f(x)$ predočuje geometrijski prirast ordinate tangente na krivulju $y = f(x)$, kad x poraste za dx, odnosno Δx. Slično tome totalni diferencijal dz funkcije $z = f(x, y)$ predočuje geometrijski prirast aplikate tangentne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki $T(x, y, z)$, kad x i y porastu za dx i dy, odnosno za Δx i Δy. [Vidi geometrijsko značenje parcijalnih derivacija funkcije $z = f(x, y)$].

Malo prije smo izveli jednadžbu tangentne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki (x_1, y_1, z_1) te plohe. Tu jednadžbu možemo lako izvesti iz izraza (80) za totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$. Neka su (x, y, z) koordinate bilo koje točke tangentne ravnine, a (x_1, y_1, z_1) koordinate njenog dirališta. Tada uzevši u obzir geometrijsko značenje totalnog diferencijala i definicije prirasta $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ i $\Delta z = dz$, uvrstimo u (80):

$dx = \Delta x = x - x_1$; $dy = \Delta y = y - y_1$ i $dz = \Delta z = z - z_1$, pa dobijemo:

$$z - z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_1)$$

a to je naša formula (75).

Navedimo primjere za računanje totalnog diferencijala.

Izračunaj totalne diferencijale funkcija:

1. $$z = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$$

Najprije računamo obje parcijalne derivacije zadane funkcije z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

a sada prema (80) imamo:

$$dz = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

ili

$$dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$$

2.

$$u = \frac{s + t}{s - t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{(s - t) \cdot 1 - (s + t) \cdot 1}{(s - t)^2} = - \frac{2t}{(s - t)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(s - t) + (s + t)}{(s - t)^2} = \frac{2s}{(s - t)^2}$$

$$du = - \frac{2t\,ds}{(s - t)^2} + \frac{2s\,dt}{(s - t)^2} = \frac{2(s\,dt - t\,ds)}{(s - t)^2}$$

Totalni diferencijal funkcije triju i više promjenljivih definira se na isti način kao i totalni diferencijal funkcije dviju promjenljivih. Na pr., totalni diferencijal funkcije triju promjenljivih

$$u = f(x, y, z)$$

glasi:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Govoreći u drugom dijelu ovog Repetitorija o primjeni diferencijala dy funkcije $y = f(x)$, pokazali smo, da za male $|\Delta x|$ možemo približno uzeti da je

$$\Delta y \doteq dy$$

jer se Δy razlikuje od dy za beskonačno malu veličinu višeg reda obzirom na Δx kao beskonačno malu veličinu prvog reda, pa pomoću diferencijala možemo računati pogreške funkcije jedne mjerene veličine.

Na slični način može se pokazati, da je i za funkciju dviju promjenljivih $z = f(x, y)$ razlika između prirasta funkcije

$$\Delta z = f(x + \Delta x, \; y + \Delta y) - f(x, y)$$

i totalnog diferencijala te funkcije

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

t. j. razlika

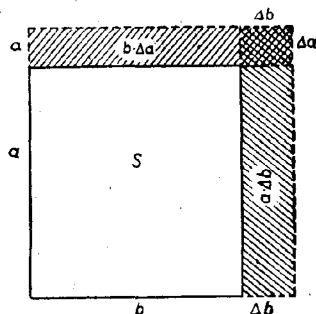
$$| \Delta z - dz |$$

beskonačno mala veličina višeg reda obzirom na Δx i Δy kao **beskonačno male** veličine prvoga reda, pa se može približno uzeti da je

$$\Delta z \doteq dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y \qquad (81)$$

Geometrijski to znači, da se mjesto prirasta aplikate plohe $z = f(x, y)$, kad x poraste za Δx, a y za Δy, uzima prirast aplikate tangentne ravnine povučene na tu plohu u točki $T(x, y, z)$.

Primijetimo, da za funkciju od tri i više promjenljivih možemo također približno uzeti, da je prirast funkcije jednak njenom totalnom diferencijalu.



Sl. 72

Budući da je mnogo jednostavnije izračunati totalni diferencijal funkcije nego njen prirast, jer, kako se iz (81) vidi, dz je linearna funkcija od Δx i Δy, pogreška veličine izračunate iz podataka mjerenja računa se obično pomoću totalnog diferencijala. (Vidi Repetitorij II, § 1, 5).

Navedimo nekoliko primjera.

1. Kolika je pogreška ΔS površine S pravokutnika, ako je mjerenjem dobiveno za stranice tog pravokutnika: a cm $\pm$ Δa cm i b cm $\pm$ Δb cm, gdje su Δa i Δb pogreške mjerenja duljine stranica pravokutnika (vidi sliku 72).

Primijetimo, da prave vrijednosti pogrešaka mjerenja nisu, naravno, poznate niti po veličini, a niti po predznaku, poznate su samo **gornje međe** tih pogrešaka, u našem slučaju Δa i Δb.

a) Točni račun pogreške ΔS:

$$S = a \cdot b$$

$$\Delta S = (a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab = ab + b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b + \Delta a \cdot \Delta b - ab =$$
$$= b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b + \Delta a \cdot \Delta b \qquad \text{(a)}$$

b) Približni račun pogreške ΔS pomoću diferencijala:
Prema (81):

$$\Delta S \doteq dS = \frac{\partial S}{\partial a} \cdot \Delta a + \frac{\partial S}{\partial b} \cdot \Delta b$$

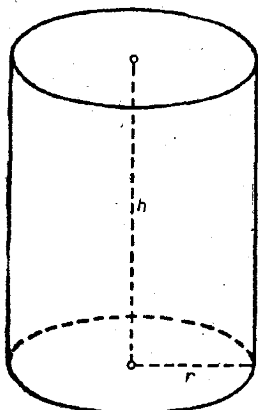
$$S = ab$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = b \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = a$$

$$\Delta S = b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b \qquad (\text{u cm}^2) \qquad \text{(b)}$$

Usporedimo li rezultate (a) i (b), vidimo, da smo u približnom računu izgubili član $\Delta a \cdot \Delta b$, t. j. površinu pravokutnika dvostruko iscrtkanog u slici 72. Jasno je, da ta površina nema praktički nikakvog značenja obzirom na površine $b \cdot \Delta a$ i $a \cdot \Delta b$, također prikazane u slici 72.

2. Izračunaj apsolutnu i relativnu pogrešku volumena V valjka, ako je mjerenjem dobijeno: r cm $\pm$ Δr cm i h cm $\pm$ Δh cm (sl. 73).



Sl. 73

$$V = \pi r^2 h$$

Prema (81):

$$\Delta V \doteq dV = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

Apsolutna pogreška:

$$\Delta V \doteq 2\pi r h \cdot \Delta r + \pi r^2 \cdot \Delta h \qquad \text{(u cm}^3\text{)}$$

Da dobijemo relativnu pogrešku, podijelimo apsolutnu pogrešku s $V = \pi r^2 h$.

Relativna pogreška:

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

$\frac{\Delta r}{r}$ je relativna pogreška izmjerenog polumjera r osnovke, a $\frac{\Delta h}{h}$ relativna pogreška izmjerene visine h valjka. Iz izraza za relativnu pogrešku $\frac{\Delta V}{V}$ izračunatog volumena V valjka, vidimo, da relativna pogreška polumjera valjka ulazi u dvostrukom iznosu, a to pokazuje, da treba što točnije mjeriti polumjer valjka, da pogreška izračunatog volumena V bude što manja.

Totalni diferencijal daje, dakle, uputu, koje veličine treba točnije mjeriti, da se po mogućnosti umanji pogreška veličine izračunate iz podataka mjerenja.

Praktički se to svojstvo diferencijala često upotrebljava, na pr. u astronomiji, gdje se pomoću diferencijalnih formula određuju najpodesnije zvijezde i vrijeme njihova opažanja, da se što točnije odrede one veličine, koje se računaju iz podataka astronomskih opažanja.

Primjeri.

1. Odredi apsolutnu, relativnu i procentualnu pogrešku funkcije

$$z = 5x^2y - 2xy^2 - 3xy + x - 7y + 20$$

ako je

$$x = 2 \pm 0{,}1 \quad \text{i} \quad y = 3 \pm 0{,}2$$

Prema (81):

$$\Delta z \doteq dz = (10xy - 2y^2 - 3y + 1)\,\Delta x + (5x^2 - 4xy - 3x - 7)\,\Delta y$$

Uvrštenje $x = 2$; $y = 3$; $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$ daje:

$$\Delta z \doteq (60 - 18 - 9 + 1) \cdot 0,1 + (20 - 24 - 6 - 7) \cdot 0,2$$
$$\Delta z \doteq 3,4 + (-17) \cdot (-0,2)$$

Kako predznaci Δx i Δy nisu poznati, a traži se najveća moguća apsolutna pogreška Δz, uzeta je pogreška Δy s predznakom minus.

$$\Delta z \doteq 3,4 + 3,4 = \underline{6,8}$$

Za $x = 2$ i $y = 3$

$$z = 60 - 36 - 18 + 2 - 21 + 20 = 7$$

Relativna pogreška:

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{6,8}{7} = \underline{0,97}$$

Procentualna pogreška

$$\frac{\Delta z}{z} \cdot 100\% = 0,97 \cdot 100\% = \underline{97\%}$$

2. Isto za $z = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$, ako je $x = 2 \pm 0,01$ i $y = 1 \pm 0,025$

$$\Delta z \doteq dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2 - y^2) \cdot y - 2x^2 y}{(x^2 - y^2)^2} \quad ; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{3 - 8}{3^2} = -\frac{5}{9}$$

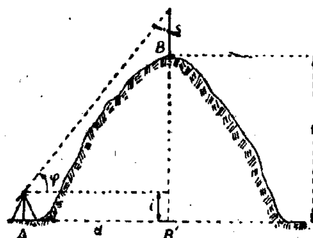
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2 - y^2) \cdot x + 2xy^2}{(x^2 - y^2)^2} \quad ; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{6 + 4}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\Delta z \doteq \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot (-0,01) + \frac{10}{9} \cdot 0,025 = \frac{5}{900} + \frac{25}{900} = \underline{\frac{1}{30}}$$

$$z_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{3}} = \underline{\frac{1}{20}}$$

$$\frac{\Delta z}{z} \cdot 100\% = \underline{5\%}$$



Sl. 74

3. Da se odredi visinska razlika $BB' = h$ točaka A i B izmjeren je vertikalni kut $B'AB$, horizontalna udaljenost točaka A i B, visina instrumenata i i visina signala s.

Odredi pogrešku Δh, ako je dobiveno $B'AB = \varphi \pm \Delta\varphi$ i $AB' = d \pm \Delta d$, zanemarivši pogreške u mjerenju i i s.

Prema slici 74:

$$h - i + s = d \cdot tg\varphi$$

ili

$$h = d \cdot tg\varphi + i - s$$

$$\Delta h \doteq dh = \frac{\partial h}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \Delta\varphi$$

$$\Delta h \doteq tg\,\varphi \cdot \Delta d + \frac{d}{\cos^2 \varphi} \cdot \Delta\varphi$$

Kako je $tg\varphi = 0$ za $\varphi = 0$, odnosno $tg\varphi = \infty$ za $\varphi = 90°$, a $\cos^2\varphi$, koji je u nazivniku drugog člana, prima vrijednosti 1 i 0 za iste vrijednosti φ, pogreška Δh je to veća, što je kut φ veći, odnosno to manja, što je kut φ manji.

Na pr. za $d = 1000\text{m} \pm 0{,}1\text{m}$ i $\varphi = 5° \pm 10'$ dobijemo, uzevši u obzir da je $tg\,5° = 0{,}087$, $\cos 5° = 0{,}996$ i $arc\,10' = 0{,}003$.

$$\Delta h \doteq 0{,}087 \cdot 0{,}1 + \frac{1000}{0{,}992} \cdot 0{,}003 = 0{,}0087 + 3{,}02 = 3{,}0287m \doteq \underline{3{,}0m}$$

dok uz iste podatke, ali $\varphi = 30°$ imamo:

$$\Delta h \doteq 0{,}577 \cdot 0{,}1 + \frac{1000}{0{,}750} \cdot 0{,}003 = 0{,}0577 + 4{,}00 = 4{,}0577m = \underline{4{,}1m}$$

Vidimo, da se pogreška u visini povećala s povećanjem kuta.

Izračunaj:

1. Vrijednost totalnog diferencijala funkcije

$$z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{za} \quad x = 3\,;\ y = 4\,;\ \Delta x = \pm 0{,}1 \ \text{i} \ \Delta y = \pm 0{,}2$$

$$[dz = 0{,}08]$$

2. Apsolutnu, relativnu i procentualnu pogrešku volumena V krnjeg stošca, ako je mjerenjem dobiveno

$$R = 30\text{ cm} \pm 3\text{ mm} \quad ; \quad r = 20\text{ cm} \pm 4\text{mm} \quad ; \quad v = 40\text{cm} \pm 2\text{ mm}$$

$$[\Delta V \doteq 2575\text{ cm}^3]$$

3. Približnu vrijednost povećanja volumena V stošca, kojemu je visina $h = 10$ cm, a polumjer osnovke $r = 5$ cm, ako visinu h povećamo za 2 mm, a polumjer r za 1 mm.

$$[\Delta V \doteq 15{,}71\text{cm}^3]$$

8. Totalni diferencijali viših redova

Drugi totalni diferencijal d^2z funkcije $z = f(x, y)$ jest diferencijal od prvog diferencijala te funkcije, t. j.

$$d^2z = d(dz) = \text{prema (80)} = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \text{prema (80)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy$$

Kako su x i y nezavisne promjenljive, možemo dx i dy smatrati da su konstante, te imamo:

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy$$

Odatle

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{dy^2} dy^2 \tag{82}$$

[dx^2 i dy^2 znače $(dx)^2$, odnosno $(dy)^2$]

Vidimo, da dobiveni izraz ima oblik binoma na kvadrat, pa ga možemo simbolički prikazati kao kvadrat prvog diferencijala funkcije $z = f(x, y)$:

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^2 \tag{82a}$$

pamteći da je kvadrat simbolički, jer »kvadrat« parcijalnih derivacija funkcije daje druge parcijalne derivacije te funkcije. Isto tako možemo prikazati treći totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ kao simbolički kub njenog prvog diferencijala:

$$d^3z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^3 =$$

$$= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{dy^3} \partial y^3 \tag{83}$$

Na slični način definiramo i simbolički prikazujemo totalne diferencijale viših redova za funkcije triju i više promjenljivih.

Na pr. za $u = f(x, y, z)$ drugi totalni diferencijal glasi:

$$d^2u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx\, dz +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy\, dz \tag{84}$$

Primjer

$u = xyz$. Odredi d^3u.

$$d^3u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right)^3 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right]^3 =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^3 + 3\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2 \frac{\partial u}{\partial z}dz +$$

$$+ 3\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}dz^3 =$$

$$= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3 +$$

$$+ 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}dx^2dz + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}dx\,dy\,dz + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z}dy^2dz + \qquad (a)$$

$$+ 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}dx\,dz^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2}dy\,dz^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}dz^3$$

Sada računamo za zadanu funkciju

$$u = xyz$$

vrijednosti parcijalnih derivacija, koje ulaze u (a):

Deriviramo po	x	y	z
$\frac{\partial u}{\partial x} = yz$			
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0$	$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 0$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = z$	—	$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 0$	$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 1$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = y$	—	—	$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2} = 0$
$\frac{\partial u}{\partial y} = xz$			
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	—	$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$	$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = 0$
$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = x$	—	—	$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} = 0$
$\frac{\partial u}{\partial z} = xy$			
$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	—	—	$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0$

Uvrštenje u (a) vrijednosti parcijalnih derivacija izračunatih u toj tablici daje

$$\underline{d^3u = 6\,dx\,dy\,dz}$$

9. Totalni diferencijal složenih funkcija

Neka je zadana funkcija $w = f(u, v)$, gdje su u i v funkcije od x, y i z, t. j. $u = u(x, y, z)$ i $v = v(x, y, z)$. Zadana je, dakle, složena funkcija dviju promjenljivih $w = f[u(x, y, z), v(x, y, z)]$.

Prvi totalni diferencijal složene funkcije građen je tako, kao da su u i v nezavisne promjenljive, a ne funkcije, što u stvari jesu.

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \tag{85}$$

U tome se izrazuje t. zv. invarijantnost (nepromjenljivost) diferencijala. Pokažimo to svojstvo diferencijala za složenu funkciju jedne promjenljive.

Ako je x nezavisna promjenljiva, tada je za $y = f(x)$

$$dy = f'(x)\, dx$$

Neka je sada x funkcija od t, t. j.

$$x = \varphi(t)$$

Tada je

$$dx = \varphi'(t) dt$$

ali izraz za diferencijal dy ostaje nepromjenjen za bilo koju diferencijabilnu funkciju $\varphi(t)$. Pokažimo to.

Uvrštenje $x = \varphi(t)$ u $y = f(x)$ daje

$$y = f[\varphi(t)]$$

Diferenciramo li taj izraz po pravilu za diferenciranje složenih funkcija (vidi Dio II. § 1, 8), dobit ćemo

$$dy = f'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

a kako je $\varphi(t) = x$, a $\varphi'(t)dt = dx$, imamo

$$dy = f'(x)\, dx$$

kao da je x nezavisna promjenljiva.

Prema tome je u izrazu $y' = \dfrac{dy}{dx}$ svejedno, da li je x nezavisna promjenljiva ili funkcija neke druge promjenljive. Međutim, diferencijali drugog i viših redova nisu invarijantni obzirom na zamjenu nezavisne promjenljive.

Izračunajmo drugi totalni diferencijal složene funkcije $w = f(u, v)$, gdje je $u = u(x, y, z)$ i $v = v(x, y, z)$.

Prvi totalni diferencijal prema (85) glasi:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$$

$$d^2w = d(dw) = \text{prema (85)} = \frac{\partial (dw)}{\partial u} du + \frac{\partial (dw)}{\partial v} dv$$

Uvrštenje (85) daje:

$$d^2w = \frac{\partial \left[\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv\right]}{\partial u} du + \frac{\partial \left[\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv\right]}{\partial v} dv =$$

po pravilu produkta, odnosno sume =

$$= \left[\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial (du)}{\partial u} + du \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial (dv)}{\partial u}}_{=0} + dv \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right] du +$$

$$+ \left[\underbrace{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial (du)}{\partial v}}_{=0} + du \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial (dv)}{\partial v} + dv \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right] dv$$

Uzmemo li u obzir, da je $\frac{\partial (dv)}{\partial u} = 0$ i $\frac{\partial (du)}{\partial v} = 0$, jer u funkcije $u = u(x, y, z)$ i $v = v(x, y, z)$ ne ulazi v, odnosno u, da je $\frac{\partial (du)}{\partial u} du = d^2u$, a $\frac{\partial (dv)}{\partial v} dv = d^2v$, i uredimo li gornji izraz, dobit ćemo formulu za drugi totalni diferencijal složene funkcije:

$$d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u} d^2u + \frac{\partial w}{\partial v} d^2v \tag{86}$$

ili u simboličkom obliku

$$d^2w = \left(\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u} d^2u + \frac{\partial w}{\partial v} d^2v \tag{86a}$$

Ako u i v nisu funkcije, već nezavisne promjenljive, posljednja dva člana u izrazu (86) otpadaju, jer su u tom slučaju du i dv konstante, pa je $d^2u = 0$ i $d^2v = 0$.

Vidimo, da su izrazi za drugi totalni diferencijal različiti već prema tome, da li su u i v nezavisne promjenljive ili funkcije.

Sasvim na isti način računaju se treći, četvrti i ostali totalni diferencijali složenih funkcija.

Primjer

$$w = u^2 + 2uv \quad , \quad \text{gdje je } u = 2x - y^2 \text{ , a } v = xy.$$

Izračunaj dw i d^2w.

Prema (85):

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 2u + 2v \quad ; \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 2dx - 2y\, dy$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 2u \quad ; \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = y\, dx + x\, dy$$

Uzevši u obzir da je $u = 2x - y^2$, a $v = xy$ dobijemo prema (85):

$$dw = (4x - 2y^2 + 2xy)(2dx - 2y\, dy) + (4x - 2y^2)(y\, dx + x\, dy)$$

Odatle

$$dw = (8x - 4y^2 + 4xy)\, dx + (-8xy + 4y^3 - 4xy^2)\, dy + (4xy - 2y^3)\, dx + (4x^2 - 2xy^2)\, dy$$

ili

$$\underline{dw = (8x - 4y^2 + 8xy - 2y^3)\, dx + (-8xy + 4y^3 - 6xy^2 + 4x^2)\, dy}$$

Računamo prema (86):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 2 \quad ; \quad du^2 = (2dx - 2y\, dy)^2 = 4(dx^2 - 2y\, dx\, dy + y^2\, dy^2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2 \quad ; \quad du\, dv = (2dx - 2y\, dy)(y\, dx + x\, dy) = 2(y\, dx^2 - y^2\, dx\, dy +$$
$$+ x\, dx\, dy - xy\, dy^2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \quad ; \quad d^2 u = \frac{\partial (du)}{\partial x} dx + \frac{\partial (du)}{dy} dy = 0 \cdot dx - 2dy^2 = -2dy^2$$

$$d^2 v = \frac{\partial (dv)}{\partial x} dx + \frac{\partial (dv)}{\partial y} dy = dydx + dx\, dy = 2dxdy$$

Uvrštenje u (86) daje:

$$d^2 w = 8(dx^2 - 2y\, dx\, dy + y^2\, dy^2) + 8(y\, dx^2 - y^2\, dx\, dy + x\, dx\, dy - xy\, dy^2) +$$
$$+ 0 - 2(4x - 2y^2 + 2xy)dy^2 + 2(4x - 2y^2)\, dx\, dy$$

ili ako uredimo

$$\underline{d^2 w = (8 + 8y)\, dx^2 + (-16y - 12y^2 + 16x)\, dx\, dy + (12y^2 - 12xy - 8x)dy^2}$$

Pokus

Uvrštenje $u = 2x - y^2$ i $v = xy$ u $w = u^2 + 2uv$ daje:

$$w = 4x^2 - 4xy^2 + y^4 + 4x^2 y - 2xy^3 = f(x, y)$$

Prema (80):

$$\underline{dw = (8x - 4y^2 + 8xy - 2y^3)\, dx + (-8xy + 4y^3 + 4x^2 - 6xy^2)dy}$$

Prema (82):

$$\underline{d^2 w = (8 + 8y)dx^2 + 2(-8y + 8x - 6y^2)dx\, dy + (-8x + 12y^2 - 12xy)dy^2}$$

10. Parcijalne derivacije složenih funkcija više promjenljivih

I. $w = f(u, v)$, gdje je $u = u(x)$, a $v = v(x)$.

Traži se $\frac{dw}{dx}$.

To je obična neparcijalna derivacija w po x, jer preko u i v w je funkcija samo jedne promjenljive $x : w = f[u(x), v(x)]$.

Znamo prema (85), da je

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \quad | : dx$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \tag{87}$$

Ta važna formula daje shemu za računanje parcijalnih **derivacija** složenih funkcija.

Iz te formule vidimo, da se derivacije složene funkcije oblika

$$w = f[u(x), v(x)]$$

računaju tako, da se najprije w derivira po u, taj diferencijalni kvocijent množi se s derivacijom u po x, a zatim se tako dobivenom produktu doda produkt derivacija w po v i v po x

Primjer

$w = u^3 - uv$, gdje je $u = \sin x$, a $v = \cos x$.

Odredi $\frac{dw}{dx}$.

$w = f[u(x), v(x)]$, pa prema shemi (87) računamo:

$$\frac{dw}{dx} = (3u^2 - v) \cos x + (-u) \cdot (-\sin x)$$

Uvrštenje $u = \sin x$ i $v = \cos x$ daje

$$\frac{dw}{dx} = (3 \sin^2 x - \cos x) \cos x + \sin^2 x = 3 \sin^2 x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x$$

ili

$$\frac{dw}{dx} = 3 \sin^2 x \cos x - \cos 2x$$

Pokus

Uvrštenje $u = \sin x$ i $v = \cos x$ u w daje:

$$w = \sin^3 x - \sin x \cos x$$

$$\frac{dw}{dx} = 3 \sin^2 x \cos x + \sin x \sin x - \cos x \cos x$$

ili

$$\frac{dw}{dx} = 3 \sin^2 x \cos x - \cos 2x$$

II. $w = f(u, v)$, gdje je $u = u(x, y, z)$, a $v = v(x, y, z)$

Traži se $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ i $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Sada dolaze samo parcijalne derivacije, jer je funkcija w preko u i v funkcija triju promjenljivih x, y i z.

Napišimo zadanu funkciju u obliku

$$w = f[u(x, y, z), v(x, y, z)]$$

pa računamo prema shemi (87):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \tag{88a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \tag{88b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \tag{88c}$$

Primjeri

1. $w = u^3 - uv$, gdje je

$u = xyz$; $v = x^2 + y^2 + z^2$

Odredi $\frac{\partial w}{\partial x} = w_x$; $\frac{\partial w}{\partial y} = w_y$ i $\frac{\partial w}{\partial z} = w_z$

$w = f(u, v)$; $u = u(x, y, z)$; $v = v(x, y, z)$, **dakle**

$$w = f[u(x, y z), v(x, y, z)] \tag{a}$$

w deriviramo po x, pa prema (a), odnosno (88a) imamo:

$$w_x = (3u^2 - v)yz + (-u)2x$$

Uvrštenje $u = xyz$ i $v = x^2 + y^2 + z^2$ daje

$$w_x = 3x^2y^3z^3 - x^2 y z - y^3 z - y z^3 - 2x^2 yz$$

ili

$$\underline{w_x = 3x^2 y^3 z^3 - 3x^2 yz - y^3 z - yz^3}$$

w deriviramo po y:

$$w_y = (3u^2 - v)\, xz + (-u)2y$$

Uvrštenje vrijednosti za u i v daje

$$w_y = 3x^3 y^2 z^3 - x^3 z - xy^2 z - x z^3 - 2x y^2 z$$

ili

$$\underline{w_y = 3x^3 y^2 z^3 - x^3 z - 3x y^2 z - xz^3}$$

w deriviramo po z:

$$w_y = (3u^2 - v)xy + (-u)2z$$

ili

$$w_z = 3x^3 y^3 z^2 - x^3 y - x y^3 - xyz^2 - 2xyz^2$$

ili

$$w_z = 3x^3 y^3 z^2 - x^3 y - xy^3 - 3xyz^2$$

Rezultate kontroliraj tako, da u w uvrsti $u = xyz$ i $v = x^2 + y^2 + z^2$, a zatim deriviraj w po x, y i z.

2. $z = x^2 + y^2$, gdje je

$$x = r \cos \varphi \quad i \quad y = r \sin \varphi$$

Izračunajmo $\frac{\partial z}{\partial r} = z_r$ i $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = z_\varphi$:

$z = f(x, y)$; $x = x(r, \varphi)$, $y = y(r, \varphi)$, dakle

$$z = f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)] \tag{a}$$

Prema (a) i formulama (88) dobijemo:

$$z_r = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$z_\varphi = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

Prema gornjim formulama i uzevši u obzir da je

$$z = x^2 + y^2 \quad , \quad a \quad x = r \cos \varphi \quad i \quad y = r \sin \varphi$$

računamo:

$$z_r = 2x \cdot \cos \varphi + 2y \cdot \sin \varphi = 2r \cos^2 \varphi + 2r \sin^2 \varphi = \underline{2r}$$

$$z_\varphi = 2x(-r \sin \varphi) + 2y(r \cos \varphi) = -2r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi = \underline{0}$$

Odredimo sada druge parcijalne derivacije zadane složene funkcije

$$w = f(u, v), \text{ t. j. } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = w_{xy}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = w_{xz},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w_{yy}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = w_{yz} \quad i \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = w_{zz}$$

U tu svrhu opet napišimo našu funkciju u obliku

$$w = f[u(x, y, z), v(x, y, z)] \tag{a}$$

pa deriviramo već izračunate prve parcijalne derivacije pamteći:

a) da su oba člana svake formule (88) produkti, pa se deriviraju po pravilu produkta,

b) da prvi faktori tih produkata sadrže w, pa ih deriviramo po shemi (87) imajući uvijek pred očima našu funkciju u obliku (a), dok članove s u i v deriviramo obično.

1. Deriviramo (88a)

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\quad \text{po } x:$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Odatle nakon uređenja dobijemo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

(Do istog rezultata dolazimo dijeleći formulu (86) s dx^2)

ili u simboličkom obliku:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\qquad \textbf{(89a)}$$

2. Deriviramo (88a) po y:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

ili nakon uređenja

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\qquad \textbf{(89b)}$$

3. Deriviramo (88a) po z:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

ili nakon uređenja

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\partial w^2}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \tag{89c}$$

Sada deriviraj po shemi (87):

(88b) po y, a zatim po z, i konačno

(88c) po z.

Dobit ćeš nakon uređenja:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{89d}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \tag{89e}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{89f}$$

Primjer

Izrazi u polarnim koordinatama Laplace-ovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u ravnini

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Znamo formule prijelaza od pravokutnih koordinata na polarne i obratno:

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi \tag{a}$$

$$tg\, \varphi = \frac{y}{x} \quad , \quad \text{odatle} \quad \varphi = arc\, tg \frac{y}{x}$$
$$r = + \sqrt{x^2 + y^2} \tag{b}$$

Uvrstimo li u zadanu funkciju $U = f(x, y)$ formule (a), bit će

$$U = f(\varphi, r) \quad , \quad \text{gdje je prema (b)}$$
$$\varphi = \varphi\,(x, y)$$
$$r = r\,(x, y)$$

pa shema za deriviranje funkcije U glasi:

$$U = f\,[\varphi(x, y),\; r(x, y)]$$

Usporedimo li ovaj oblik funkcije U s funkcijom $w = f[u(x, y, z), v(x, y, z)]$, za koju smo računali druge parcijalne derivacije, vidjet ćemo da je za naš slučaj,

$$u = \varphi \quad ; \quad v = r \quad ; \quad z = 0$$

pa obzirom na formule (89a) i (89d) računamo prema formulama prijelaza (a) i (b):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = \text{prema (a) i (b)} = -\frac{r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{r} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi$$

Prema izračunatim prvim parcijalnim derivacijama računamo druge:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = -\frac{-\frac{r \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{r} - \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r^2} = +\frac{\sin 2\varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = +\frac{\sin^2 \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \cos \varphi \cdot \frac{\partial r}{\partial y}}{r^2} = -\frac{\frac{r \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r} + \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

Uvrštenje izračunatih prvih i drugih parcijalnih derivacija u (89a) i (89d) daje:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\sin 2\varphi}{r^2} + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \sin^2 \varphi - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\sin 2\varphi}{r^2} + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

Zbrojimo li te jednakosti, dobit ćemo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

pa Laplace-ova diferencijalna jednadžba u polarnim koordinatama glasi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

Do istog rezultata možemo naravno doći bez upotrebe formula (89) izračunavši prema (87) prve, a zatim druge parcijalne derivacija funkcije $U = f[\varphi(x,y), \tau(x,y)]$ i uzevši u obzir formule prijelaza (a) (b).

Načini tu vježbu!

Prikaži parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

u novim promjenljivim u i v, ako je $x = u + v$, a $y = u - v$, odnosno $u = \frac{x+y}{2}$ a $v = \frac{x-y}{2}$

$$\left[4\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} = 0\right]$$

11. Deriviranje implicitnih funkcija

Znajući derivirati složene funkcije, možemo lako izvesti formule, koje omogućuju izračunavanje derivacije funkcije, koja je zadana implicitno, bez prijelaza na njen eksplicitni oblik. Te formule su od osobite važnosti za deriviranje funkcija, koje ne možemo prikazati eksplicitno, a osim toga često je jednostavnije derivirati funkciju u implicitnom obliku ne vršeći prijelaz na eksplicitni oblik, iako je taj prijelaz moguć.

I. Zadana je implicitna funkcija y jedne promjenljive x, t. j. $f(x, y) = 0$. Traži se $y' = \frac{dy}{dx}$

Najprije nastaje pitanje, predočuje li svaka implicitna relacija od x i y funkciju y od x? Jednostavan primjer

$$e^{x+y} = 0$$

daje već negativan odgovor na to pitanje. Ustvari nema takvih vrijednosti x i y, koje bi e^{x+y} pretvorili u nulu, pa gornji izraz ne predočuje nikakvu funkciju. Do istog zaključka dolazimo i geometrijskim putem, ako se sjetimo, da funkcija od x i y predočuje krivulju u ravnini XY i da je $z = e^{x+y}$ neka ploha u prostoru. Kako za $z = 0$ dobijemo izraz $e^{x+y} = 0$, koji nema smisla, zaključujemo, da ta ploha ne siječe ravninu XY, pa dakle nema ni krivulje $e^{x+y} = 0$.

Kako bi ploha $z = f(x, y)$ mogla samo dodirivati ravninu XY u jednoj točki, za postojanje implicitne funkcije $f(x, y) = 0$ nije dovoljno pretpostaviti da postoji jedna točka (x_0, y_0), u kojoj je $f(x_0, y_0) = 0$, već moramo osigurati prijesjek te plohe s ravninom XY. U tu svrhu stavimo još drugi uvjet: funkcija f mora imati u okolišu te točke (x_0, y_0) parcijalne derivacije po svim promjenljivim, u našem slučaju derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$, pri čemu derivacija funkcije f po onoj promjenljivoj, koju smatramo funkcijom, u našem slučaju $\frac{\partial f}{\partial y}$, mora biti u točki (x_0, y_0) različita od nule. Konačno, tražimo li da zadana implicitna funkcija bude neprekinuta, stavimo još i treći uvjet: parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ moraju biti neprekinute u okolišu točke (x_0, y_0).

Uz ta tri uvjeta postoji samo jedna funkcija $y = y(x)$, koja za $x = x_0$ prima vrijednost $y = y_0$, koja identički u x zadovoljava jednadžbu $f[x, y(x)] \equiv 0$ i koja u okolišu točke $x = x_0$ ima derivaciju pa je neprekinuta u tom okolišu.

Slično glase uvjeti za postojanje implicitne funkcije od bilo koliko argumenata.

Pretpostavimo, dakle, da zadana implicitna funkcija

$$f(x, y) = 0 \tag{a}$$

odgovara gore navedenim uvjetima, pa odredimo $y' = \frac{dy}{dx}$.

Eksplicitna funkcija bi glasila

$$y = y(x)$$

Uvrštenje u (a) daje identitet,

$$f[x, y(x)] \equiv 0 \tag{b}$$

jer je gornji izraz jednak nuli za bilo koju vrijednost x. (Na pr. uvrštenje u implicitnu funkciju $2x + y - 6 = 0$ njenog eksplicitnog izraza $y = -2x + 6$ daje identitet $2x - 2x + 6 - 6 \equiv 0$). Sada funkciju f deriviramo po x i to obzirom na (b) prvo po nezavisnom x, a zatim po x, zavisnom od y, pa prema (87) dobijemo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Vrijednost dobivene derivacije jednaka je nuli, jer funkcija f za sve vrijednosti x ima konstantnu vrijednost (0), a derivacija konstante jednaka je nuli.

Odatle računamo $\frac{dy}{dx}$. Dobijemo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{90}$$

Opažamo, da se u nazivniku desne strane izraza (90) nalazi derivacija f po funkciji.

Da dobijemo $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, deriviramo formulu (90) po pravilu za deriviranje kvocijenta funkcija, pri čemu postupamo kao prije imajući pred očima shemu (b), odnosno (87):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \tag{91}$$

U taj izraz treba još uvrstiti vrijednost $\frac{dy}{dx}$ iz (90).

Primjeri

1. $f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ (jednadžba kružnice)

Kako je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, imamo prema (90):

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Prema (91) imamo:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2y\left[2 + 0 \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)\right] - 2x\left[0 + 2 \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)\right]}{4y^2} =$$

$$= -4\frac{y + \frac{x}{y}}{4y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}$$

U ovom primjeru nije teško napisati eksplicitni oblik zadane funkcije pa kontrolirati dobivene rezultate.

2. Dokaži, da funkcija y, zadana jednadžbom

$$arc\ tg \frac{y}{x} = ln \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{ili} \qquad arc\ tg \frac{y}{x} - ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$x(y' - 1) = y(y' + 1)$$

Prema (90) računamo $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x}{\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y}$$

Uredimo:

$$y' = -\frac{\frac{-y - x}{x^2 + y^2}}{\frac{x - y}{x^2 + y^2}} = \frac{x + y}{x - y}$$

Uvrštenje u diferencijalnu jednadžbu daje:

$$x\left(\frac{x + y}{x - y} - 1\right) = y\left(\frac{x + y}{x - y} + 1\right)$$

ili

$$\frac{2xy}{x - y} = \frac{2xy}{x - y}$$

Znajući izračunati derivaciju $y' = \frac{dy}{dx}$ funkcije zadane implicitno, možemo lako napisati jednadžbe tangente i normale na krivulju, čija je jednadžba zadana u implicitnom obliku.

Znamo, da jednadžbe tangente i normale na krivulju $y = y(x)$ u točki (x_1, y_1) glase:

$$tg: \quad y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$$

$$nr: \quad y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1)$$

[Vidi Dio I, formule (90) i (91)].

Uvrštenje formule (90) daje jednadžbe tangente i normale u točki (x_1, y_1) krivulje $f(x, y) = 0$:

$$tg: \quad y - y_1 = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1}(x - x_1)$$

$$nr: \quad y - y_1 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1}(x - x_1)$$

ili

$$tg: \quad (x - x_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + (y - y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = 0$$

$$nr: \quad (x - x_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 - (y - y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = 0 \qquad (90a)$$

gdje indeksi »1« postavljeni uz parcijalne derivacije pokazuju, da te derivacije treba uzeti u zadanom diralištu (x_1, y_1).

Primjeri

1. Napiši jednadžbe tangente i normale na krivulju

$$x^3y + y^3x + x^2y^2 - 3 = 0$$

u točki (1, 1)

Prema (90a) računamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^3 + 2xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3y^2x + 2x^2y$$

Uvrštenje koordinate dirališta (1, 1) daje

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = 3 + 1 + 2 = 6$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = 1 + 3 + 2 = 6$$

a odatle prema (90a) dobijemo:

$$tg: \quad (x - 1)\,6 + (y - 1)\,6 = 0$$

$$nr: \quad (x - 1)\,6 - (y - 1)\,6 = 0$$

ili

$$\underline{x + y - 2 = 0} \cdots\cdots \text{ jednadžba tangente}$$

$$\underline{x - y \quad = 0} \cdots\cdots \text{ jednadžba normale}$$

2. Isto za krivulju

$$\cos xy = x + 2y$$

u točki (1, 0)

Prema (90a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y \sin xy - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin xy - 2$$

a u točki (1, 0)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = -1 \quad ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = -2$$

Uvrštenje u (90a) daje:

$$(x - 1)(-1) + (y - 0)(-2) = 0$$

$$(x - 1)(-2) - (y - 0)(-1) = 0$$

ili

$$\underline{x + 2y - 1 = 0} \cdots\cdots \text{ jednadžba tangente}$$

$$\underline{2x - y - 2 = 0} \cdots\cdots \text{ jednadžba normale}$$

Izračunaj y' za

1. $y = 1 + xe^y$ $\qquad\left[\frac{e^y}{2 - y}\right]$

2. $y = x + arc\, tg\, y$ $\qquad\left[\frac{1 + y^2}{y^2}\right]$

3. Dokaži, da funkcija zadana jednadžbom $xy - \ln y = 1$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y^2 + (xy - 1)y' = 0$.

II. Zadana je implicitna funkcija z od dvije promjenljive x i y, t. j.

$$F(x, y, z) = 0. \text{ Traže se } \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = p \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = q.$$

Uz pretpostavku, da zadani implicitni izraz $F(x, y, z) = 0$ odgovara uvjetima, koji su slični onima za $f(x, y) = 0$, t. j. da postoji funkcija $z = z(x, y)$, uvrstimo $z = z(x, y)$ u $F(x, y, z) = 0$.

Dobijemo:

$$F[x, y, z(x, y)] \equiv 0 \tag{a}$$

Prvo deriviramo funkciju F po x i to obzirom na (a) najprije po slobodnom x, a zatim po onome, koji je vezan sa z prema shemi (87):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Odatle računamo $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{92a}$$

Sada F deriviramo po y na isti način:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Odatle računamo $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{92b}$$

Opet vidimo, da su u nazivnicima derivacije F po funkciji.

Druge parcijalne derivacije

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = r \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} = s \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = t$$

(r, s i t su Gauss-ove oznake za te parcijalne derivacije) računamo tako, da formulu (92a) deriviramo po pravilu kvocijenta po x, a zatim po y, a formulu (92b) po y, i to obzirom na (a) i shemu (87):

Izračunajmo $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

Ovamo treba uvrstiti još vrijednost $\frac{\partial z}{\partial x}$ iz (92a).

Izračunaj na isti način $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Slično se izvode i računaju parcijalne derivacije implicitnih funkcija od tri i više nezavisnih promjenljivih (vidi dalje primjer 4).

Izvodeći jednadžbe tangentne ravnine i normale na plohu $z = f(x, y)$, naveli smo jednadžbe (76) i (78) za slučaj, kad je ploha zadana implicitno $F(x, y, z) = 0$. Sada možemo lako pokazati, kako dolazimo do tih jednadžbi.

Uvrstimo u tu svrhu u jednadžbe (75) i (77)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_1) = z - z_1$$

$$\frac{x - x_1}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - z_1}{-1}$$

vrijednosti parcijalnih derivacija iz formula (92a) i (92b), pa pomnoživši prvu jednadžbu s $-\frac{\partial F}{\partial z}$, a drugu podijelivši s $-\frac{\partial F}{\partial z}$, dobit ćemo te jednadžbe u obliku (76) i (78):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 (z - z_1) = 0 \qquad (76)$$

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1} \qquad (78)$$

pri čemu indeksi »1« kazuju, da parcijalne derivacije treba uzeti u dirålištu (x_1, y_1, z_1).

Primjere za primjenu formula (76) i (78) vidi gore str 100 i sl.

Primjeri

1. Izračunaj $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$$

Prema (92a):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - 4}{2z + 2} = \underline{\frac{2 - x}{1 + z}}$$

Prema (92b):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-4y}{2z + 2} = \underline{\frac{2y}{1 + z}}$$

2. Isto za $e^z - xyz = 0$

Prema (92a):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-yz}{e^z - xy}$$

a kako iz zadane jednadžbe slijedi, da je $e^z = xyz$, uvrštenje daje:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-yz}{xyz - xy} = \frac{z}{xz - x} = \underline{\frac{z}{x(z - 1)}}$$

Prema (92b):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{xyz - xy} = \underline{\frac{z}{y(z - 1)}}$$

3. Isto za $x^{yz} + y^{xz} + z^{xy} = 0$

Prema (92a):

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yzx^{yz-1} + zy^{xz} \ln y + yz^{xy} \ln z}{yx^{yz} \ln x + xy^{xz} \ln y + xyz^{xy-1}}}$$

Prema (92b):

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z\, x^{yz} \ln x + xzy^{xz-1} + xz^{xy} \ln z}{yx^{yz} \ln x + xy^{xz} \ln y + xyz^{xy-1}}}$$

4. Izračunaj $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial z}$ za

$$\sin(x \cdot y \cdot z \cdot u) - \cos(x^2 + y^2) - e^{yz} + u^z = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}} = -\underline{\frac{yzu \cdot \cos(xyzu) + 2x \sin(x^2 + y^2)}{xyz \cdot \cos(xyzu) + z\, u^{z-1}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}} = -\underline{\frac{xzu \cdot \cos(xyzu) + 2y \cdot \sin(x^2 + y^2) - z\, e^{yz}}{xyz \cdot \cos(xyzu) + z\, u^{z-1}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial u}} = -\underline{\frac{xyu \cos(xyzu) - y\, e^{yz} + u^z \ln u}{xyz \cos(xyzu) + z\, u^{z-1}}}$$

5. Dokaži, da za funkciju

$$-x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$$

vrijedi jednakost

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

Obje tražene druge parcijalne derivacije računat ćemo neposredno iz prvih derivacija.

Prema (92a) i (92b):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2x-4}{2z+2} = \frac{x+2}{z+1} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-4y}{2z+2} = \frac{2y}{z+1} \qquad \text{(b)}$$

(a) derivirajmo parcijalno po y, a (b) po x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{(z+1)\cdot 0 - (x+2)\cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2} = -\frac{(x+2)\cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{(z+1)\cdot 0 - 2y\cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{(z+1)^2} = -\frac{2y\cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{(z+1)^2}$$

Uvrštenje (a) i (b) u gornje jednadžbe daje:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{2y(x+2)}{(z+1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -\frac{2y(x+2)}{(z+1)^3}$$

Vidimo, da je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

III. Neka su zadane implicitno dvije funkcije u i v dviju nezavisnih promjenljivih x i y:

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v) &= 0 \\ g(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Traže se $\quad \frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial v}{\partial y}$

Eksplicitno bi obje funkcije glasile:

$$u = u(x, y) \quad \text{i} \quad v = v(x, y)$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\left.\begin{aligned} f[x, y, u(x, y), v(x, y)] &\equiv 0 \\ g[x, y, u(x, y), v(x, y)] &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Prema (b) i obzirom na (87) deriviramo f i g po x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \underline{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \underline{\frac{\partial v}{\partial x}} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \underline{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \underline{\frac{\partial v}{\partial x}} = 0$$

Dobili smo dvije jednadžbe s dvije tražene nepoznanice $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial x}$.
Riješimo te jednadžbe načinom determinanata:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}} \quad (93)$$

Izrazi dobiveni za $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial x}$ pišu se simbolički ovako:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \quad (93a)$$

Sada prema (b) deriviramo f i g po y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \underline{\frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \underline{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \underline{\frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \underline{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0$$

Odatle:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}} \tag{94}$$

Ili u simboličkom obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, v)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}} \tag{94a}$$

Na slični se način računaju parcijalne derivacije sustava **od n implicitnih funkcija, koje** ovise o n nezavisnim primjenljivima.

Primjeri

1. $f(x, y, u, v) \equiv x^3 - y + 2u - v^2 - a = 0$

$g(x, y, u, v) \equiv x + y^2 - u^2 + v - b = 0$

Odredi: u_x, v_x, u_y, v_y

Prema (93), odnosno (94) imamo:

$$u_x = - \frac{\begin{vmatrix} 3x^2 & -2v \\ 1 & +1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -2v \\ -2u & +1 \end{vmatrix}} = - \underline{\underline{\frac{3x^2 + 2v}{2(1 - 2uv)}}}$$

$$v_x = - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3x^2 \\ -2u & +1 \end{vmatrix}}{2(1 - 2uv)} = - \underline{\underline{\frac{1 + 3x^2 u}{1 - 2uv}}}$$

$$u_y = - \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2v \\ 2y & +1 \end{vmatrix}}{2(1 - 2uv)} = \underline{\underline{\frac{1 - 4yv}{2(1 - 2uv)}}}$$

$$v_y = - \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2u & 2y \end{vmatrix}}{2(1 - 2uv)} = - \underline{\underline{\frac{2y - u}{1 - 2uv}}}$$

2.
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 - u + 5 &= 0 \\ x + y - z + u^2 - 7 &= 0 \\ x^3 - 2y^2 + z^3 - u^3 + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Tu su x, y i z funkcije od u.

Izračunaj $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial u}$

Funkcije x, y i z u eksplicitnom obliku glasile bi:

$$x = x(u) \quad ; \quad y = y(u) \quad \text{i} \quad z = z(u)$$

pa zadane implicitne jednadžbe možemo općenito prikazati u obliku

$$\begin{aligned} f\,[u, x(u)\,,\, y(u)\,,\, z(u)] &\equiv 0 \\ g\,[u, x(u)\,,\, y(u)\,,\, z(u)] &\equiv 0 \\ h\,[u, x(u)\,,\, y(u)\,,\, z(u)] &\equiv 0 \end{aligned}$$

Deriviramo f, g i h po u prema (87):

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

Za naš primjer imamo prema tim formulama:

$$\begin{aligned} &-1 + 2x\frac{\partial x}{\partial u} - 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + 2z\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \\ &2u + \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \qquad\qquad (a) \\ &-3u^2 + 3x^2\frac{\partial x}{\partial u} - 4y\frac{\partial y}{\partial u} + 3z^2\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \end{aligned}$$

Dobili smo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice. Riješimo ga:

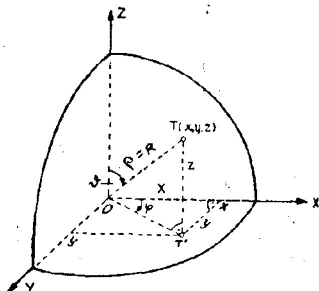
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2y & 2z \\ -2u & +1 & -1 \\ 3u^2 & -4y & 3z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & -2y & 2z \\ 1 & +1 & -1 \\ 3x^2 & -4y & 3z^2 \end{vmatrix}} = \frac{(3z^2 - 4y) + 2y(-6z^2u + 3u^2) + 2z\,(8yu - 3u^2)}{2x(3z^2 - 4y) + 2y(3z^2 + 3x^2) + 2z(-4y - 3x^2)}$$

Odredi na isti način iz jednadžbi (a) $\frac{\partial y}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial u}$.

12. Parametarski oblik funkcija dviju nezavisnih promjenljivih i njihovo deriviranje

Govoreći o parametarskom predočivanju funkcije jedne promjenljive $y = f(x)$ (vidi Dio I. § 5), rekli smo, da se to predočivanje sastoji u tome, da se obje koordinate x i y svake točke krivulje $y = f(x)$ prikažu kao funkcije nove promjenljive t, koja se zove parametar. Slično imamo pri parametarskom predočivanju

funkcije dviju promjenljivih $z = f(x, y)$, koja, kako znamo, predočuje plohu u prostoru. Razlika je samo u tome, što svaka točka plohe ima tri koordinate (x, y, z) i da je ploha geometrijska tvorevina dviju dimenzija, pa treba koordinate (x, y, z) neke opće točke plohe prikazati kao funkcije dvaju parametara u i v.



Sl. 75

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned}\right|$$ Jednadžba funkcije dviju promjenljivih u parametarskom obliku

Kao primjer prikažimo u parametarskom obliku jednadžbu kugline plohe (kugle) polumjera R.

U tu svrhu uvedimo prostorne polarne (sferne) koordinate za bilo koju točku T prostora (vidi sl. 75).

$OT = \rho =$ radijvektor točke, t. j. udaljenost točke od ishodišta koordinatnog sustava (pola),

$\varphi =$ kut, što ga projekcija TT' radijvektora ρ na ravninu XY zatvara s + osi X (geografska dužina točke),

$\vartheta =$ kut, što ga radijvektor ρ zatvara s + osi Z $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right.$ je geografska širina točke$\left.\right)$.

ρ se mijenja od 0 do $+\infty$, φ od 0 do 2π (360°), a ϑ od 0 do π (180°).

Za točku $T(x, y, z)$ na kuglinoj plohi imamo prema sl. 75:

$$\begin{aligned} \rho &= R \\ OT' &= R \sin \vartheta \\ x &= OT' \cdot \cos \varphi = R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \\ y &= OT' \cdot \sin \varphi = R \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \\ z &= R \cos \vartheta \end{aligned}$$

Prema tome je

$$\left.\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \\ y &= R \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \\ z &= R \cos \vartheta \end{aligned}\right| \qquad (95)$$

parametarska jednadžba kugline plohe polumjera R.

φ i ϑ su parametri.

Jednadžba kugline plohe ima u sfernim koordinatama mnogo jednostavniji oblik:

$\rho = R =$ konst. — jednadžba kugline plohe polumjera R u sfernim koordinatama.

φ i ϑ ne ulaze u jednadžbu, jer je radijvektor $\rho = R$ za bilo koje φ i ϑ.

Da izvršimo prijelaz od parametarskog oblika na obični $z = f(x, y)$, treba parametre φ i ϑ ukloniti.

Pokažimo taj prijelaz na našem primjeru kugline plohe.

Kvadriramo li i zbrojimo li prve dvije jednadžbe sustava (95), dobit ćemo:

$$x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \vartheta \qquad \text{(a)}$$

Iz treće jednadžbe slijedi:

$$\cos \vartheta = \frac{z}{R}$$

pa je

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta = 1 - \frac{z^2}{R^2} = \frac{R^2 - z^2}{R^2}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$x^2 + y^2 = R^2 - z^2$$

ili

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ili

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Iz uspoređenja te jednadžbe kugle s njenim parametarskim oblikom (95), vidimo jednu od mnogih prednosti parametarskog predočivanja funkcije: pomoću parametra φ i ϑ promjenljive x, y i z izražene su jednoznačno, dok je funkcija $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ dvoznačna.

Parcijalne derivacije funkcije zadane parametarski računamo po pravilu za deriviranje sustava implicitnih funkcija (vidi pređašnju točku 11, III).

Pokažimo to na primjeru kugle (95).

Tražimo $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$

Iz treće jednadžbe sustava (95) imamo uzevši u obzir, da je ϑ funkcija od x, y i z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - R \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

i $\qquad$ (a)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - R \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$$

Da odredimo $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ i $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$, napišimo prve dvije jednadžbe sustava (95) u obliku:

$$\begin{aligned} f(\varphi, \vartheta, x) &\equiv R \cos \varphi \cdot \sin \vartheta - x = 0 \\ g(\varphi, \vartheta, y) &\equiv R \sin \varphi \cdot \sin \vartheta - y = 0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Kako je prema slici 75 $\varphi = \varphi(x, y)$, a $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$, imamo:

$$\begin{aligned} f[\varphi(x, y), \vartheta(x, y, z), x] &\equiv 0 \\ g[\varphi(x, y), \vartheta(x, y, z), y] &\equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

Obje funkcije deriviramo po x prema shemi (87):

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \qquad (d)$$

Prema (b) računamo:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = - R \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \;; \quad \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = R \cos \varphi \cdot \cos \vartheta ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = R \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \;; \quad \frac{\partial g}{\partial \vartheta} = R \sin \varphi \cos \vartheta \qquad (e)$$

Uvrštenje u (d) daje:

$$- R \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + R \cos \varphi \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - 1 = 0$$

$$R \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + R \sin \varphi \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

Riješimo li po $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ te dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, na pr. načinom determinanata, dobit ćemo:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\cos \varphi}{R \cos \vartheta}$$

Da odredimo $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$, deriviramo jednadžbe (c) po y. Uvrštenje vrijednosti (e) i $\frac{\partial g}{\partial y} = -1$ u jednadžbe dobivene deriviranjem dat će dvije jednadžbe s nepoznanicama $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ i $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$, iz kojih odredimo posljednju. Dobit ćemo:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\sin \varphi}{R \cos \vartheta}$$

Načini taj izvod!

Uvrštenje u (a) daje tražene parcijalne derivacije:

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial x} = -\cos \varphi \cdot tg\, \vartheta} \;; \quad \underline{\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin \varphi \cdot tg\, \vartheta}$$

Odredivši te parcijalne derivacije, možemo lako napisati jednadžbe tangentne ravnine i normale na kuglu, čija je jednadžba zadana u parametarskom obliku (95):

Uvrštenje vrijednosti tih derivacija u (75) i (77) daje:

$$\cos\varphi_1\cdot tg\,\vartheta_1(x-x_1)+\sin\varphi_1\cdot tg\,\vartheta_1(y-y_1)+(z-z_1)=0$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\varphi_1\cdot tg\,\vartheta_1}=\frac{y-y_1}{\sin\varphi_1\cdot tg\,\vartheta_1}=\frac{z-z_1}{1}$$

To su jednadžbe tangentne ravnine i normale na kuglu u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$, odnosno (φ_1, ϑ_1).

Jednadžbu normale možemo napisati i u drugom obliku pomnoživši sve nazivnike s $\cos\vartheta_1$:

$$\frac{x-x_1}{\cos\varphi_1\cdot\sin\vartheta_1}=\frac{y-y_1}{\sin\varphi_1\cdot\sin\vartheta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\vartheta_1}$$

Kako su kosinusi smjera radijvektora OT_1 prema slici 75 i jednadžbama (4) i (95):

$$\cos\alpha_1=\frac{x_1}{R}=\cos\varphi_1\cdot\sin\vartheta_1,\quad \cos\beta_1=\frac{y_1}{R}=\sin\varphi_1\cdot\sin\vartheta_1;$$

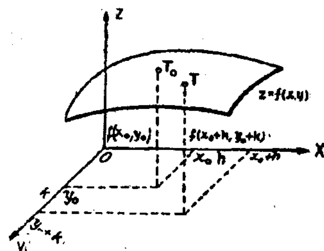
$$\cos\gamma_1=\frac{z_1}{R}=\cos\vartheta_1$$

identični s kosinusima smjera normale, zaključujemo, da je tangentna ravnina okomita na polumjeru kugle povučenom u dirališe.

13. Taylor-ove i Mac Laurin-ove formule i redovi za funkcije dviju i više nezavisnih promjenljivih

Zadana je funkcija dviju nezavisnih promjenljivih. Treba je prikazati u obliku polinoma tih promjenljivih. Taj prikaz daje, kao i za funkciju jedne promjenljive (vidi Dio I. § 18, 8), Taylor-ova, odnosno Mac Laurin-ova formula.

Geometrijski se taj problem svodi na to, da se aplikata zadane funkcije $z=f(x, y)$ u točki $T(x_0+h, y_0+k)$, t. j. $f(x_0+h, y_0+k)$, izrazi pomoću aplikate te funkcije u zadanoj točki $T_0(x_0, y_0)$, t. j. pomoću $f(x_0, y_0)$, i vrijednosti parcijalnih derivacija te funkcije u toj točki T_0 (sl. 76).



Sl. 76

Pretpostavimo, da je zadana funkcija $z=f(x, y)$ neprekinuta i da ima u okolišu točke $T_0(x_0, y_0)$, u kojem leži točka $T(x_0+h, y_0+k)$, neprekinute parcijalne derivacije svih redova do uključivo n-toga reda. Polazeći od Mac Laurin-ove formule jedne nove promjenljive t lako dolazimo do Taylor-ove formule za funkciju $z=f(x, y)$, koja u simboličkom obliku glasi:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^2_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^3_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \cdots\cdot \qquad (96)$$

$$\cdots\cdot + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{n-1}_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^n_{\substack{x=x_0+\vartheta h\\y=y_0+\vartheta_1 h}}$$

gdje je

$$0 < \vartheta < 1$$
$$0 < \vartheta_1 < 1$$

Potencije binoma su simbolične, slične onima kod računanja diferencijala (vidi točku 8.). Indeksi $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ napisani uz binome napominju, da parcijalne derivacije treba uzeti u točki $T_0(x_0, y_0)$, to znači: u izračunate parcijalne derivacije treba uvrstiti $x = x_0$ i $y = y_0$. U posljednjem $(n+1)$ članu parcijalne derivacije uzete su u nekoj točki $(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta_1 k)$, gdje su ϑ i ϑ_1 pozitivni pravi razlomci inače neodređeni. Taj posljednji član Taylor-ove formule je **ostatak** R_n, čiju vrijednost ne možemo izračunati, jer su parcijalne derivacije n-toga reda, kako vidimo, uzete u nekoj točki, za koju znamo samo to, da leži negdje u okolišu točke $T_0(x_0, y_0)$.

Uvrstimo li u Taylor-ovu formulu (96)

$$x_0 + h = x; \qquad y_0 + k = y$$

a također

$$h = x - x_0; \qquad k = y - y_0$$

dobit ćemo Taylor-ovu formulu u drugom obliku:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)\right]^2_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)\right]^3_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \cdots\cdot$$

$$\cdots\cdot + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)\right]^n_{\substack{x=x_0+\vartheta h\\y=y_0+\vartheta_1 h}} \qquad (96a)$$

gdje je

$$0 < \vartheta < 1$$
$$0 < \vartheta_1 < 1$$

Vidimo, da Taylor-ova formula predočuje funkciju $f(x, y)$ u obliku polinoma od $(x - x_0)$ i $(y - y_0)$ stepena $(n - 1)$-ga + ostatak R_n:

$$f(x, y) = P_{n-1}[(x - x_0), (y - y_0)] + R_n$$

Leži li zadana točka $T_0(x_0\ y_0)$ na osi Z, t. j. ako je $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, dobit ćemo uvrstivši u Taylor-ovu formulu (96)

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad h = x \quad i \quad k = y$$

Mac Laurin-ovu formulu za funkciju $z = f(x, y)$ u simboličkom obliku:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)^2_{\substack{x=0\\y=0}} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)^3_{\substack{x=0\\y=0}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)^{n-1}_{\substack{x=0\\y=0}} + \quad (97)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)^n_{\substack{x=\vartheta x\\y=\vartheta_1 x}}$$

gdje je

$$0 < \vartheta < 1$$
$$0 < \vartheta_1 < 1$$

Indeksi $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ uz binome pokazuju, da su parcijalne derivacije uzete u točki $T_0(0, 0)$. Posljednji član formule je ostatak R_n, čiju vrijednost ne možemo izračunati, jer su n-te parcijalne derivacije uzete u nekoj točki $(\vartheta x, \vartheta_1 x)$, koja leži negdje u okolišu točke T_0.

Vidimo, da Mac Laurin-ova formula prikazuje funkciju $f(x, y)$ u obliku polinoma od x i y stepena $(n - 1)$-ga + ostatak R_n.

$$f(x, y) = P_{n-1}(x, y) + R_n$$

Pretpostavimo sada, da zadana funkcija ima parcijalne derivacije svih mogućih redova u okolišu točke T_0 i da ostatak R_n teži po apsolutnoj vrijednosti nuli, kad n, t. j. broj članova polinoma, teži u beskonačnost:

$$\lim_{n \to \infty} |R_n| = 0$$

Drugim riječima, pretpostavimo, da je funkcija $f(x, y)$ analitička funkcija u okolišu točke T_0.

U tom slučaju Taylor-ova i Mac Laurin-ova formule dobiju beskonačno mnogo članova i prelaze u beskonačne redove potencija, koji konvergiraju i daju kao sumu zadanu funkciju $f(x, y)$ i to za one x, y za koje ostatak $|R_n|$ teži nuli.

Taylor-ov red glasi dakle prema (96a):

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x - x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x - x_0)^2(y - y_0) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x - x_0)(y - y_0)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(y - y_0)^3\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \cdots \qquad (96b)$$

Prema (97) dobijemo Mac Laurin-ov red:

$$f(x, y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}y^2\right)_{\substack{x=0\\y=0}} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}x^2 y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y^3\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \cdots \qquad (97a)$$

Sasvim slični oblik imaju Taylor-ove i Mac Laurin-ove formule i redovi za funkciju triju i više promjenljivih.

Primjeri

1. Funkciju $z = \sin x \cdot \sin y$ razvij po potencijama od $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ i $\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$.

To znači: zadanu funkciju treba razviti u Taylor-ov red polazeći iz točke

$$x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad y_0 = \frac{\pi}{4}$$

Računamo prema (96b):

$$f(x_0, y_0) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cdot \cos y; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \cdot \sin y; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot \cos y; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \cdot \sin y; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = \underline{-\frac{1}{2}} \quad \text{i.t.d.}$$

Uvrštenje podvučenih vrijednosti te $x_0 = \frac{\pi}{4}$ i $y_0 = \frac{\pi}{4}$ u (96b) daje traženi red potencija:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2\right] + \ldots$$

2. Izračunaj $1{,}1^{1{,}02}$ na 4 decimale točno pomoću Taylor-ova reda.

Napišimo $1{,}1^{1{,}02}$ u obliku $(1 + 0{,}1)^{1+0{,}02}$ i postavimo $1 + 0{,}1 = x$ i $1 + 0{,}02 = y$. Tada zadani izraz poprima oblik x^y, pri čemu je $0{,}1 = x - 1$ i $0{,}02 = y - 1$, pa tako dobivenu funkciju $z = x^y$ razvijemo u Taylor-ov red polazeći iz točke $(x_0 = 1,\ y_0 = 1)$.

Računamo prema (96b) za funkciju $z = x^y$:

$$f(x_0, y_0) = 1^1 = \underline{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 1 \cdot 1^0 = \underline{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 1 \cdot 0 = \underline{0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)\,x^{y-2} = (y^2 - y)\,x^{y-2}; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = \underline{0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^{y-1}; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = 0 + 1 = \underline{1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ln x \cdot x^y \ln x = x^y \ln^2 x; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = \underline{0}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = (y^2 - y)(y-2) \cdot x^{y-3}; \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 = \underline{0}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = (y^2 - y) \cdot x^{y-2} \cdot \ln x + x^{y-2} \cdot (2y - 1); \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 = 1^{-1} \cdot 1 = \underline{1}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} = \ln x\,(y\,x^{y-1} \ln x + x^{y-1}) + x^{y-1} \cdot \ln x; \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 = \underline{0}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \ln^2 x \cdot x^y \ln x; \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 = \underline{0}$$

Uvrštenje podvučenih vrijednosti, a također $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$ u (96b) daje:

$$x^y = 1 + (x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)] + \ldots$$

ili

$$x^y = x + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + \ldots$$

Sada uvrstimo $x = 1{,}1$ i $y = 1{,}02$:

$$1{,}1^{1{,}02} = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}02 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}02 + \ldots$$

$$1{,}1^{1{,}02} = 1{,}1 + 0{,}002 + 0{,}0001 + \ldots$$

$$\underline{1{,}1^{1{,}02} = 1{,}1021 \text{ na 4 decimale točno.}}$$

3. Funkciju $z = \sin^2(2x - 3y)$ razvij po potencijama od x i y.

To znači: zadanu funkciju treba razviti u Mac Laurin-ov red.

Računamo prema (97a):

$$f(0{,}0) = \sin^2 0 = \underline{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot 2 \sin(2x - 3y) \cdot \cos(2x - 3y) = 2\sin[2(2x - 3y)] =$$

$$= 2\sin(4x - 6y); \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 2\sin 0 = \underline{0}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3\sin(4x - 6y); \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \underline{0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8\cos(4x - 6y); \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = 8\cos 0 = \underline{8}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -12\cos(4x - 6y); \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 = \underline{-12}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = +18\cos(4x - 6y); \quad \left(\frac{\partial f^2}{\partial y^2}\right)_0 = \underline{18}$$

i t. d.

Uvrštenje u (97a) daje:

$$\sin^2(2x - 3y) = \frac{1}{2!}(8x^2 - 24xy + 18y^2) + \frac{1}{4!}(-128x^4 + 4 \cdot 192x^3y -$$

$$- 6 \cdot 288\, x^2y^2 + 4 \cdot 432x\,y^3 - 648y^4) + \cdots =$$

$$= 4x^2 - 12xy + 9y^2 - \frac{16}{3}x^4 + 32x^3y - 72x^2y^2 + 72x\,y^3 - 27y^4 + \cdots$$

Za vježbu:

Funkciju $z = e^x \cdot \sin y$ razvij u red po potencijama od x i $\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left[z = -1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x\left(y + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cdots\right]$$

Razvij po potencijama od x i y funkcije:

a) $z = e^x \sin y$ $\quad\left[z = y + xy + \frac{1}{3!}(3x^2 y - y^3) + \cdots\right]$

b) $z = \dfrac{1}{(x-1)(y-1)}$ $\quad[z = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + \cdots]$

c) $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x - y}{1 + xy}$ $\quad\left[z = x - y - \dfrac{x^3 - y^3}{3} + \dfrac{x^5 - y^5}{5} + \cdots\right]$

d) $z = \sin(x + y)$. Rezultat kontroliraj tako, da uzevši $x + y = z$ rastavi u red potencija $\sin z$ [vidi Dio I. formula (150)].

14. Primjena Taylor-ove formule za približno rješavanje jednadžbi

U prvom dijelu Repetitorija (vidi § 17) naveli smo više metoda za približno rješavanje algebarskih i transcendentnih jednadžbi. Iste jednadžbe, a također sustave tih jednadžbi možemo također približno rješavati pomoću Taylor-ove formule.

Pretpostavimo, da treba riješiti sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}\right|$$

Geometrijski to znači, da tražimo koordinate (x_0, y_0) sjecišta tih krivulja. Kako ta točka (x_0, y_0) leži na obim krivuljama, bit će

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= 0 \\ g(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Narišimo grafove obiju krivulja i iz slike što točnije očitamo koordinate x_1 i y_1 njihova sjecišta. Očitane vrijednosti x_1 i y_1 smatramo prvim aproksimacijama traženih rješenja x_0, y_0 zadanog sustava jednadžbi.

Budući da su x_1 i y_1 samo približne vrijednosti traženih rješenja sustava, bit će

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &\neq 0 \\ g(x_1, y_1) &\neq 0 \end{aligned}$$

Da dobijemo točne vrijednosti x_0, y_0 traženih rješenja zadanog sustava jednadžbi, moramo aproksimativnim rješenjima x_1 i y_1 dodijeliti popravke h_1 i k_1, pa je

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + h_1 \\ y_0 &= y_1 + k_1 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, \quad y_1 + k_1) &= 0 \\ g(x_1 + h_1, \quad y_1 + k_1) &= 0 \end{aligned}$$

Obje funkcije f i g razvijemo po Taylor-ovoj formuli (96), pri čemu se ograničimo samo na linearne članove formule:

$$0 = f(x_1 + h_1, y_1 + k_1) = f(x_1, y_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 k_1$$

$$0 = g(x_1 + h_1, y_1 + k_1) = g(x_1, y_1) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_1 h_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_1 k_1$$

Dobili smo dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice h_1 i k_1. Riješimo ih načinom determinanata:

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_1, y_1) & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \\ -g(x_1, y_1) & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_1 & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_1 \end{vmatrix}} \tag{98}$$

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 & -f(x_1, y_1) \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_1 & -g(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_1 & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_1 \end{vmatrix}} \qquad (98)$$

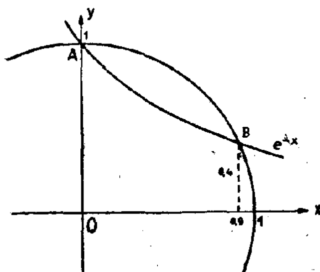
Međutim, iz gornjih izraza ne ćemo dobiti točne vrijednosti popravaka h_1 i k_1 naših prvih aproksimacija x_1 i y_1, jer smo u Taylor-ovoj formuli uzeli samo 3 prva člana zanemarivši sve ostale, već ćemo dobiti samo približne vrijednosti popravaka. Dodamo li dakle te približne vrijednosti popravaka h_1 i k_1 našim prvim aproksimacijama x_1 i y_1, ne ćemo dobiti točne vrijednosti x_0 i y_0 traženih rješenja, već samo njihove druge bolje aproksimacije:

$$x_2 = x_1 + h_1$$
$$y_2 = y_1 + k_1$$

Sada ponavljamo postupak zamijenivši x_1 i y_1 sa x_2 i y_2, a h_1 i k_1 sa h_2 i k_2, pa prema formulama (98), u kojima zamijenimo indekse 1 s 2, dobijemo druge popravke h_2 i k_2, dakle i treće još bolje aproksimacije traženih rješenja sustava:

$$x_3 = x_2 + h_2$$
$$y_3 = y_2 + k_2$$

Postupak nastavljamo, dok ne dobijemo tražena rješenja sustava na potreban broj decimala točno.



Sl. 77

Primjer

Riješi na tri decimale točno sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} y &= e^{-x} \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Iz slike 77 vidimo, da se grafovi eksponencijalne funkcije i kružnice polumjera 1 sijeku u točki $A(0,1)$ i točki B, čije su približne koordinate (0,9; 0,4). Vrijednosti tih koordinata uzmimo kao prve aproksimacije traženih riješenja zadanog sustava jednadžbi:

$$x_1 = 0,9$$
$$y_1 = 0,4$$

Napisavši zadane jednadžbe u obliku

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{-x} - y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned} \qquad (a)$$

računamo prema (98):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \; ; \; \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \qquad (b)$$

Uvrštenje $x_1 = 0{,}9$ i $y_1 = 0{,}4$ u (a) i (b) daje:

$$f(x_1, y_1) = e^{-0{,}9} - 0{,}4 = 0{,}40657 - 0{,}4 = +0{,}00657$$

$$g(x_1, y_1) = 0{,}9^2 + 0{,}4^2 - 1 = 0{,}81 + 0{,}16 - 1 = -0{,}03$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = -e^{-0{,}9} = -0{,}407\ ;\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = -1$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_1 = 2 \cdot 0{,}9 = 1{,}8\ ;\quad \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_1 = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$$

pa prema (98) dobijemo popravke h_1 i k_1 naših prvih aproksimacija:

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}00657 & -1 \\ +0{,}03 & +0{,}8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}4066 & -1 \\ +1{,}8 & +0{,}8 \end{vmatrix}} = \frac{-0{,}005256 + 0{,}03}{-0{,}32526 + 1{,}8} = \frac{0{,}02474}{1{,}47474}$$

$$h_1 = 0{,}01675$$

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}40657 & -0{,}0066 \\ 1{,}8 & +0{,}03 \end{vmatrix}}{1{,}47474} = \frac{-0{,}012197 + 0{,}011826}{1{,}47474} = \frac{-0{,}000371}{1{,}47474}$$

$$k_1 = -0{,}00025$$

Druge aproksimacije

$$x_2 = x_1 + h_1 = 0{,}91675$$
$$y_2 = y_1 + k_1 = 0{,}39975$$

Vrijednosti dobivene za x_2 i y_2 uvrstimo u (a) i (b):

$$f(x_2, y_2) = e^{-0{,}91675} - 0{,}39975 = 0{,}39996 - 0{,}39975 = +0{,}00021$$

$$g(x_2, y_2) = 0{,}91675^2 + 0{,}39975^2 - 1 = 0{,}8409 + 0{,}1600 - 1 = +0{,}0009$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2 = -e^{-0{,}91675} = -0{,}39996\ ;\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_2 = -1$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_2 = 2 \cdot 0{,}91675 = 1{,}83350\ ;\quad \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_2 = 2 \cdot 0{,}39975 = 0{,}79950$$

pa prema (98) računamo druge popravke:

$$h_2 = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}00021 & -1 \\ -0{,}0009 & +0{,}7995 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}39975 & -1 \\ +1{,}8335 & +0{,}7995 \end{vmatrix}} = \frac{-0{,}00011}{+1{,}5139} = -0{,}00007$$

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} -0,39975 & -0,00021 \\ +1,8335 & -0,0009 \end{vmatrix}}{+1,5139} = \frac{-0,00025}{+1,5139} = -0,00017.$$

Treće aproksimacije

$$x_3 = x_2 + h_2 = 0,91668$$
$$y_3 = y_2 + k_2 = 0,39958$$

Iz uspoređenja vrijednosti dobivenih za x_2, y_2 i x_3 y_3, vidimo, da su

$$\underline{x_0 = 0,917}$$
$$\underline{y_0 = 0,400}$$

tražena rješenja zadanog sustava jednadžbi na 3 decimale točno.

Pokažimo sada na primjeru, kako se rješavaju pomoću Taylor-ove formule jednadžbe s jednom nepoznanicom.

U I. dijelu Repetitorija (vidi § 17) odredili smo metodom sekante i metodom tangente jedno realno rješenje jednadžbe $x^3 + x - 8 = 0$, pri čemu smo posljednjem metodom dobili $x_0 = 1,834$ na tri decimale točno.

Riješimo sada istu jednadžbu pomoću Tavlor-ove formule.

U tu svrhu napišimo jednadžbu

$$x^3 + x - 8 = 0$$

u obliku

$$x^3 = -x + 8$$

i stavimo

$$y = x^3$$
$$y = -x + 8$$

i

$$f(x, y) = x^3 - y = 0$$
$$g(x, y) = -x + 8 - y = 0$$

Narisavši grafove kubne parabole $y = x^3$ i pravca $y = -x + 8$ očitavamo iz slike koordinate sjecišta te krivulje i pravca.

Dobijemo prve aproksimacije:

$$x_1 = 1,8 \quad ; \quad y_1 = 6,2$$

Računamo prema (98):

$$f(x_1, y_1) = 1,8^3 - 6,2 = -0,368$$
$$g(x_1, y_1) = -1,8 + 8 - 6,2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = 3 \cdot 1,8^2 = 9,72 \; ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = -1$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_1 = -1; \quad \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_1 = -1$$

Uvrštenje u (98) daje:

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} +0{,}368 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} +9{,}72 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-0{,}368}{-10{,}72} = +0{,}0343$$

$$x_2 = x_1 + h_1 = \underline{1{,}8343}$$

Usporedimo li taj rezultat s rezultatom $x_0 = 1{,}834$, koji smo dobili metodom tangente, vidimo, da smo već dobili realno rješenje zadane kubne jednadžbe na 3 decimale točno.

Odredi na isti način realno rješenje jednadžbe $x^3 - 3x^2 - 10 = 0$ na dvije decimale točno.

$[x_0 = 3{,}72]$

15. Ekstremne vrijednosti funkcije dviju i više promjenljivih

a) Pojam ekstrema prava i neprava

Neka je zadana funkcija z dviju nezavisnih promjenljivih x i y:

$$z = f(x, y)$$

koja je neprekinuta u nekom području ravnine XY. Naš je zadatak, da odredimo one točke toga područja ravnine XY, u kojima funkcija z ima maksimalne i minimalne vrijednosti, i da izračunamo numeričke iznose tih ekstremnih vrijednosti. Ne tražimo, dakle, apsolutni maksimum, odnosno minimum funkcije, već njene relativne, lokalne maksimume i minimume, tako da se može dogoditi, da je neki minimum veći od maksimuma.

Prema tome smatramo, da funkcija $z = f(x, y)$ ima maksimum u točki (x_0, y_0), ako je razlika između bilo koje susjedne aplikate užeg okoliša točke (x_0, y_0) i aplikate z_0 u točki (x_0, y_0) uvijek negativna, t. j. ako je razlika

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < 0$$

za sve $|h|$ i $|k|$ dovoljno malene, t. j. za sve točke dovoljno malog područja ravnine XY, koja ima oblik pravokutnika sa stranicama $2h$ i $2k$, kako se to vidi iz slike 78.

Slično definiramo minimum u točki (x_0, y_0): funkcija $z = f(x, y)$ ima minimum u toj točki (x_0, y_0), ako je razlika

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0$$

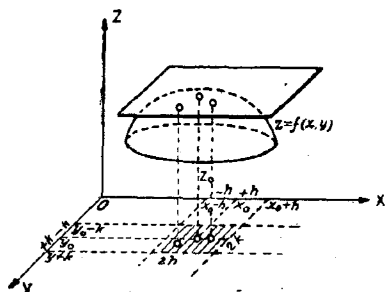
za sve $|h|$ i $|k|$ dovoljno malene (vidi sl. 79).

Slike 78 i 79 prikazuju t. zv. pravi maksimum, odnosno pravi minimum, jer je za one točke iz najbližeg okoliša točke (x_0, y_0) razlika Δ uvijek nega-

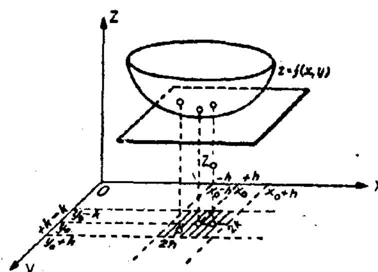
tivna, odnosno uvijek pozitivna. Tim pravim ekstremima odgovara, kako vidimo, točka vrha, odnosno točka dola plohe.

Ako je za neke točke toga užeg područja oko točke (x_0, y_0) razlika Δ jednaka nuli, ekstreme zovemo nepravi. Sl. 80 prikazuje plohu, koja u točki (x_0, y_0) ima nepravi maksimum, jer je prema slici

$$\Delta = f(x_0 \pm h, y_0 + 0) - f(x_0, y_0) = 0$$



Sl. 78



Sl. 79

Ukratko možemo kazati, da funkcija $z = f(x, y)$ ima pravi ekstrem u točki (x_0, y_0), ako predznak razlike Δ ne ovisi o predznaku h i k, koji trebaju biti dovoljno maleni, pri čemu se ta razlika Δ ne smije poništavati.

b) Nužni uvjet za ekstrem

Ako postoji ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ u nekoj točki, onda do te točke možemo doći držeći x konstantnim, a mjenjajući y, ili obrnuto mjenjajući x, a držeći y konstantnim. Mijenjamo li samo x, a y držimo čvrst, funkcija ovisi samo o jednoj promjenljivoj x, pa mora biti ispunjen uvjet za ekstrem funkcije jedne promjenljive, t. j. u točki ekstrema mora biti

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

S istog je razloga u točki ekstrema

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

U točkama ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ uvijek je dakle

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Drugim riječima, koordinate x_0, y_0 točaka ekstrema moraju zadovoljavati taj sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. To je **nužni uvjet** za ekstrem funkcije z dviju promjenljivih x i y.

Primijetimo, da slični oblik ima nužni uvjet za funkciju w od više promjenljivih $x, y, z, u, \ldots$

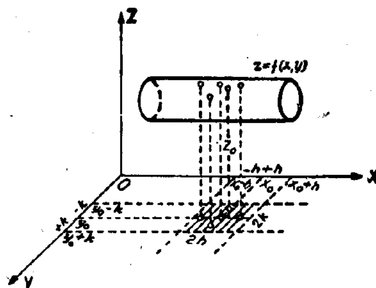
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial u} = 0 \; ; \; \ldots$$

Da je taj uvjet samo nuždan, lako se uvjerimo, ako se sjetimo geometrijskog značenja parcijalnih derivacija funkcije dviju promjenljivih. Govoreći o tom geometrijskom značenju, pokazali smo, da je u točkama plohe $z = f(x, y)$, u kojima je $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, tangentna ravnina na plohu horizontalna, t. j. paralelna s ravninom XY (vidi točku 4. ovog §). Kako je u točkama ekstrema funkcije $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, u tim je točkama tangentna ravnina na plohu horizontalna, pri čemu u točkama pravog ekstrema tangentna ravnina dira plohu u jednoj točki (vidi sl. 78 i 79), dok u točki nepravog ekstrema tangentna ravnina dira plohu u pravcu (sl. 80) ili općenito u krivulji. Međutim, ploha $z = f(x, y)$ može imati takve točke, u kojim je tangentna ravnina horizontalna, ali ne samo dira, već i siječe plohu. U tom slučaju ima ploha u području te točke oblik sedla. Kao primjer navedimo hiperbolni paraboloid. U ishodištu O, kako se to vidi na sl. 66, tangentna je ravnina na tu plohu horizontalna, ali funkcija u toj točki nema ekstrema, jer tangentna ravnina u toj točki dira i siječe plohu.

Prema tome, sustav jednadžbi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

daje samo nuždan uvjet za ekstrem, jer rješenja toga sustava daju zapravo samo koordinate onih točaka, u kojima su tangentne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ horizontalne.



Sl. 80

c) Dovoljni uvjet za ekstrem

Da izvedemo dovoljni uvjet za ekstrem funkcije $z = f(x, y)$, pretpostavimo, da funkcija ima neprekinute parcijalne derivacije drugog reda u točki (x_0, y_0) i da je u toj točki ispunjen nužni uvjet za ekstrem, t. j. da je

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 0 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 0 \tag{a}$$

Razvijemo funkciju u okolišu točke (x_0, y_0) po Taylor-ovoj formuli, pri čemu se ograničimo samo prvim članovima te formule. Prema (96) imamo:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^2_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^3_{\substack{x=x_0+\vartheta h\\y=y_0+\vartheta_1 k}}$$

gdje je

$$0<\vartheta<1$$
$$0<\vartheta_1<1$$

ili uzevši u obzir da je

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=\Delta$$

i da je obzirom na (a)

$$\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}k+\frac{\partial f}{\partial y}h\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$$

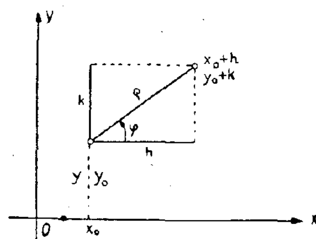
dobijemo

$$\Delta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h\cdot k+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^3_{\substack{x=x_0+\vartheta h\\y=y_0+\vartheta_1 h}}$$

Zanemarimo li u toj formuli ostatak, čija je vrijednost malena, jer su vrijednosti $|h|$ i $|k|$ dovoljno malene, ovisit će predznak Δ jedino o predznaku prvog člana desne strane, t. j. o predznaku trinoma

$$\Delta=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 h^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0 h\cdot k+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 k^2\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad \text{(b)}$$

gdje indeksi »0« uz parcijalne derivacije pokazuju, da su parcijalne derivacije uzete u točki $(x_0,\ y_0)$, u kojoj je ispunjen nužni uvjet za ekstrem funkcije $z=f(x,\ y)$.



Sl. 81

Da možemo potpuno obići okoliš točke $(x_0,\ y_0)$, u kojoj je ispunjen nužni uvjet za ekstrem, prelazimo na polarne koordinate φ i ρ.

Prema slici 81:

$$h=\rho\cos\varphi$$
$$k=\rho\sin\varphi \qquad \text{(c)}$$

Uzimajući ρ dovoljno malenim i mijenjajući kut φ od 0 do 360°, obići ćemo čitavo po volji malo kružno područje oko točke $(x_0,\ y_0)$

Uvrstimo (c) u (b), pri čemu uvedimo Gauss-ove oznake za druge parcijalne derivacije funkcije $z=f(x,\ y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=r \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=s \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=t \qquad \textbf{(99)}$$

ili u točki $(x_0,\ y_0)$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=r_0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0=s_0 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=t_0\,.$$

Dobijemo:

$$\Delta = \frac{1}{2}(r_0\rho^2\cos^2\varphi + 2s_0\rho^2\cos\varphi \cdot \sin\varphi + t_0\rho^2\sin^2\varphi)$$

ili

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}(r_0\cos^2\varphi + 2s_0\sin\varphi \cdot \cos\varphi + t_0\sin^2\varphi) \tag{d}$$

Budući da je $\frac{\rho^2}{2}$ uvijek pozitivna veličina, predznak razlike Δ jednak je predznaku trinoma u zagradama Taj trinom napišimo u drugom obliku tako, da ga pomnožimo i podijelimo sa r_0, a zatim prva dva njegova člana nadopunimo na potpuni kvadrat:

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{r_0^2\cos^2\varphi + 2r_0s_0\sin\varphi \cdot \cos\varphi + r_0t_0\sin^2\varphi}{r_0} =$$

$$= \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{(r_0\cos\varphi + s_0\sin\varphi)^2 - s_0^2\sin^2\varphi + r_0t_0\sin^2\varphi}{r_0}$$

ili

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{(r_0\cos\varphi + s_0\sin\varphi)^2 + (r_0t_0 - s_0^2)\sin^2\varphi}{r_0} \tag{e}$$

Definirajući pojam ekstrema funkcije $z = f(x, y)$, rekli smo, da funkcija ima pravi ekstrem u točki (x_0, y_0), ako predznak razlike $\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ ne ovisi o predznaku dovoljno malenih h i k i da u tom slučaju

za $\Delta < 0$ funkcija ima u točki (x_0, y_0) maksimuma, a

za $\Delta > 0$ funkcija ima u toj točki minimum,

naravno uz pretpostavku, da je $\Delta \neq 0$.

Kako je $\frac{\rho^2}{2}$ uvijek pozitivna veličina, ovisit će predznak Δ jedino o predznaku drugog faktora u (e), pa funkcija z ima sigurno ekstrem u točki (x_0, y_0), ako je taj faktor negativan, odnosno pozitivan za sve φ u dovoljno malom okolišu oko točke (x_0, y_0), t j. za ρ dovoljno malen.

Mijenjajući dakle kut φ, sudimo na temelju jednakosti (e) o predznaku razlike Δ.

Promotrimo pojedine slučajeve:

I. Neka je $r_0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \neq 0$.

Uz to pretpostavimo:

a) $$r_0t_0 - s_0^2 > 0$$

U tom je slučaju brojnik drugog faktora u (e) pozitivan za sve φ (kvadrati!), i nikad se ne poništava, predznak Δ ne ovisi dakle o φ, odnosno o predznacima h i k, već je jednak predznaku od r_0, koji je u nazivniku izraza (e).

Prema tome $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ dovoljan je uvjet za ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0), u kojoj je $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

To znači: ako je $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, tada funkcija u točki (x_0, y_0), u kojoj je ispunjen nužni uvjet, sigurno ima ekstrem i to maksimum, ako je $r_0 < 0$, odnosno minimum, ako je $r_0 > 0$, jer je tada za $r_0 < 0$ i $\Delta < 0$ a za $r_0 > 0$ i $\Delta > 0$.

Točke plohe $z = f(x, y)$, u kojima je $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, zovu se točke pozitivne zakrivljenosti ili eliptičke točke. U tim točkama tangentna ravnina na plohu dira je u jednoj točki. Na pr. kugla, elipsoid, dvokrilni hiperboloid i eliptički paraboloid imaju samo točke pozitivne zakrivljenosti (vidi sl. 58 61, 62 i 65).

b)
$$r_0 t_0 - s_0^2 < 0$$

Kako je uz tu pretpostavku drugi član brojnika $(r_0 t_0 - s_0^2) \sin^2 \varphi$ u (e) negativan, predznak brojnika, a dakle i predznak razlike Δ ovisi o vrijednosti kuta φ, t. j. o predznacima h i k, jer će za neke vrijednosti φ brojnik drugog faktora u (e) biti pozitivan, a za neke vrijednosti φ negativan.

Na pr. za $\varphi = 0$ brojnik drugog faktora u jednakosti (e) prima pozitivnu vrijednost r_0^2, a za onu vrijednost φ, koja pretvara prvu zagradu brojnika u nulu, t. j. za

$$r_0 \cos \varphi + s_0 \sin \varphi = 0 \tag{f}$$

odnosno za
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{r_0}{s_0}$$

brojnik je negativan.

Prema tome, $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ dovoljan je uvjet, da funkcija u točki (x_0, y_0) nema ekstrema.

Točke plohe $z = f(x, y)$, u kojim je $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, zovu se točke negativne zakrivljenosti ili hiperbolne točke. U tim točkama tangentna ravnina na plohu dira je i siječe, pa ploha ima oblik sedla. Na pr. jednokrilni hiperboloid i hiperbolni paraboloid imaju samo točke negativne zakrivljenosti (vidi sl. 63 i 66).

c)
$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0$$

U tom slučaju jednakost (e) prima oblik

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{(r_0 \cos \varphi + s_0 \sin \varphi)^2}{r_0} \tag{g}$$

pa je $\Delta > 0$, odnosno $\Delta < 0$ za sve vrijednosti kuta φ. Međutim, taj uvjet nije dovoljan, da bismo mogli ustvrditi, da funkcija ima ekstrem u točki (x_0, y_0), jer je prema (f)

za
$$r_0 \cos \varphi + s_0 \sin \varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{r_0}{s_0}$$

pa je za taj φ i $\Delta = 0$ prema (g).

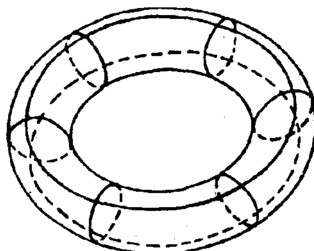
U tom slučaju morali bismo uzeti u obzir članove Taylor-ove formule, koje smo kod izvoda izraza za razliku Δ zanemarili pa na temelju tih članova prosuditi, zavisi li predznak razlike Δ od vrijednosti kuta φ, koji ulazi u te članove.

Prema tome slučaj, gdje je u točki (x_0, y_0), u kojoj je ispunjen nužni uvjet za ekstrem,

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0,$$

smatrat ćemo **neodlučnim**, jer bi u takvoj točki funkcija mogla imati ekstrem, ali ne mora da ga ima.

Točke plohe $z = f(x, y)$, u kojima je $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$, zovu se **točke nulte zakrivljenosti ili parabolne točke.** U tim točkama ploha može imati oblik sedla ili, ako tog oblika nema, tada tangentna ravnina dira plohu u pravcu ili krivulji, pa funkcija ima u toj točki nepravi ekstrem, naravno uz pretpostavku, da je tangentna ravnina u dotičnoj točki horizontalna.



Sl. 82

Plohe, koje imaju samo točke nulte zakrivljenosti i koje tangentne ravnine diraju u pravcu, zovu se **developable plohe** (od francuske riječi développer — razviti), jer se dadu bez deformacije razviti u ravninu. Na pr. valjak i stožac su developable plohe. Tangentne ravnine diraju te plohe u pravcima — izvodnicama. Kao primjer plohe, koja ima točke triju vrsti zakrivljenosti, navedimo torus, t. j. prsten kružnog poprečnog presjeka [vidi sl. 82 i Dio II. § 7, 7d)]. Vanjske točke te plohe su točke pozitivne zakrivljenosti, nutarnje — negativne zakrivljenosti, a najgornje i najdonje točke su točke nulte zakrivljenosti, jer u tim točkama ravnina dira torus u kružnici.

Uzmemo sada drugi osnovni slučaj:

II. $$r_0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = 0$$

U tom slučaju poprima izraz za razliku Δ prema (d) oblik

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \cdot (2s_0 \sin\varphi \cdot \cos\varphi + t_0 \sin^2\varphi)$$

ili

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \cdot \sin\varphi\,(2s_0 \cos\varphi + t_0 \sin\varphi) \qquad \text{(h)}$$

a) Neka je $s_0 \neq 0$

U tom slučaju, kako se jasno vidi iz izraza (h) za Δ, predznak razlike Δ ovisi o vrijednosti φ, odnosno o predznaku h i k, pa funkcija u točki (x_0, y_0) nema ekstrema.

b) Neka je $s_0 = 0$

Prema (h) poprima sada izraz za Δ oblik:

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2} \cdot t_0 \sin^2\varphi$$

Vidimo, da je razlika Δ sada pozitivna za sve φ, ali se poništava za $\varphi = 0$, pa bismo opet morali prošititi našu diskusiju na zanemarene članove Taylor-ove formule. Imamo dakle neodlučan slučaj.

Ponovimo ukratko izvedene uvjete za pravi ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0).

A. Nužni uvjet za ekstrem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0 \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0 \tag{100}$$

odnosno rješenja sustava jednadžbi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

daju koordinate onih točaka, samo u kojima funkcija može imati ekstrem. [Točke s horizontalnom tangentnom ravninom na plohu $z = f(x, y)$].

B. Dovoljni uvjet za ekstrem u točki (x_0, y_0)

I. $\quad r_0 \neq 0$

a) $\quad r_0 t_0 - s_0^2 > 0$

funkcija sigurno ima ekstrem u točki (x_0, y_0) i to

maksimum, ako je $r_0 < 0$

minimum, ako je $r_0 > 0$

b) $\quad r_0 t_0 - s_0^2 < 0$

Funkcija u točki (x_0, y_0) nema ekstrema. (101)

c) $\quad r_0 t_0 - s_0^2 = 0$

Neodlučan slučaj.

II. $\quad r_0 = 0$

a) $\quad s_0 \neq 0$

Funkcija nema ekstrema.

b) $\quad s_0 = 0$

Neodlučan slučaj.

Računski postupak pri određivanju ekstremnih vrijednosti funkcije $z = f(x, y)$ pokažimo na primjerima.

Primjeri

1. Odredi ekstremne vrijednosti funkcije

$$z = 6xy - x^3 - y^3$$

Prvi korak.

Prema (100) računamo $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 6y - 3x^2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 6x - 3y^2 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Drugi korak. Izjednačimo s nulom izraze dobivene za prve parcijalne derivacije i riješimo tako dobiveni sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 6y - 3x^2 &= 0 \\ 6x - 3y^2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} 2y - x^2 &= 0 \\ 2x - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$y = \frac{x^2}{2}$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje:

$$2x - \frac{x^4}{4} = 0$$

ili

$$8x - x^4 = 0$$

ili

$$x(8 - x^3) = 0$$

Odatle

$$x_1 = 0$$

i

$$x_2 = \sqrt[3]{8} = 2$$, ako se ograničimo samo na realna rješenja sustava, a samo ta rješenja nas zanimaju.

Uvrštenje $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$ u prvu jednadžbu sustava daje

$$y_1 = 0 \quad \text{i} \quad y_2 = 2$$

Dakle, samo u točkama $T_1(0, 0)$ i $T_2(2, 2)$ može zadana funkcija imati ekstremne vrijednosti.

Treći korak. Obzirom na (101) računamo prema (a):

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x \quad ; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 6 \quad ; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y$$

i uvrštavamo koordinate točaka T_1 i T_2:

Za točku $T_1(0, 0)$ dobijemo: $r_1 = 0$; $s_1 = 6$; $t_1 = 0$
Za točku $T_2(2, 2)$ dobijemo: $r_2 = -12$; $s_2 = 6$; $t_2 = -12$

pa prema (101) primijenimo za svaku točku posebno dovoljni uvjet za ekstrem (101).

Za točku T_1: $\left.\begin{array}{l} r_1 = 0 \\ s_1 = 6 \end{array}\right\}$ imamo slučaj II. a)

Zadana funkcija u točki $T_1(0, 0)$ nema ekstrema.

Za točku $T_2 : r_2 = -12 \neq 0$ imamo slučaj I.
Računamo $r_2 t_2 - s_2^2 = -12(-12) - 6^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$

Imamo podslučaj a). Zadana funkcija ima u točki $T_2(2, 2)$ ekstrem i to maksimum, jer je $r_2 = -12 < 0.$

Četvrti korak. Da odredimo vrijednost maksimuma, uvrstimo koordinate točke $T_2(x_2 = 2, y_2 = 2)$ u zadanu funkciju:

$$z = 6xy - x^3 - y^3$$

Dobijemo

$$z_{\text{maks}} = 6 \cdot 2 \cdot 2 - 2^3 - 2^3 = \underline{8}$$

2. Odredi ekstremne vrijednosti funkcije

$$z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 2$$

Prvi korak.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + 4 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2$$

Drugi korak.

$$-2x + 4 = 0 \quad ; \quad -2y + 2 = 0$$
$$x_0 = 2 \qquad\qquad y_0 = 1$$

Samo u točki $T_0(2, 1)$ može biti ekstrem.

Treći korak.

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \quad ; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0 \quad ; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

Budući da smo za druge parcijalne derivacije dobili konstante, imamo neposredno

$$r_0 = -2 \quad ; \quad s_0 = 0 \quad ; \quad t_0 = -2$$

$r_0 = -2 \neq 0$ slučaj I prema (101)

$r_0 t_0 - s_0^2 = -2(-2) - 0 = +4 > 0$ slučaj I a)

Funkcija u točki $T_0(2, 1)$ ima ekstrem i to maksimum, jer je $r_0 = -2 < 0.$

Četvrti korak.

$$z_{\text{maks}} = z(2, 1) = -4 - 1 + 8 + 2 - 2 = \underline{3}$$

3. Odredi ekstremne vrijednosti funkcije

$$z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$$

i to za $0 \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$ i $0 \leqq y \leqq \frac{3\pi}{2}$

t. j. u području kvadrata stranice $\frac{3\pi}{2}$.

Prvi korak.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \sin (x + y) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y - \sin (x+y)$$

Drugi korak.

$$\cos x - \sin (x + y) = 0$$
$$\cos y - \sin (x + y) = 0$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$-\sin (x + y) = -\cos x$$

a uvrštenje u drugu jednadžbu daje

$$\cos y - \cos x = 0$$

ili

$$\cos y = \cos x\ .$$

Odatle

$$y = x$$

Uvrstivši to u prvu jednadžbu, dobijemo

$$\cos x = \sin 2x$$

ili

$$\cos x = 2 \sin x \cos x$$

Odatle

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

pa imamo $\cos x = 0$, pa je $x_1 = \frac{\pi}{2}$ i $y_1 = \frac{\pi}{2}$, jer je $y = x$

a također

$$x_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad y_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$2 \sin x - 1 = 0$$

ili

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \text{pa je } x_3 = \frac{\pi}{6}, \quad y_3 = \frac{\pi}{6}$$

a također

$$x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ ; \quad y_4 = \frac{5\pi}{6}$$

Samo u točkama $T_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $T_2\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $T_3\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ i $T_4\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ može biti ekstrem.

Treći korak.

$$r = -\sin x - \cos (x + y)$$
$$s = -\cos (x + y)$$
$$t = -\sin y - \cos (x + y) = r$$

Za $T_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: $r_1 = -\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi = -1 + 1 = 0$ slučaj II. prema (10!)

$$s_1 = -\cos\pi = +1 \neq 0 \quad \text{slučaj II. a)}$$

U točki $T_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcija nema ekstrema.,

Za $T_2\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$: $r_2 = -\sin\frac{3\pi}{2} - \cos 3\pi = +1 + 1 = 2 \neq 0$ slučaj I.

$$s_2 = -\cos 3\pi = +1$$

$$t_2 = 2$$

$$r_2 t_2 - s_2^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{slučaj I a)}$$

U točki $T_2\left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{2}\right)$ ima funkcija ekstrem i to minimum, jer je $r_2 = 2 > 0$

Za $T_3\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$: $r_3 = -\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \neq 0$ slučaj I.

$$s_3 = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$t_3 = -1$$

$$r_3 t_3 - s_3^2 = +1 - \frac{1}{4} = +\frac{3}{4} > 0 \quad \text{slučaj I a)}$$

U točki $T_3\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ ima funkcija ekstrem i to maksimum, jer je $r_3 = -1 < 0$.

Za $T_4\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$: $r_4 = -\sin\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3} = -\sin 150^0 - \cos 300^0 = -\cos 60^0 -$
$- \sin 30^0 = -1 \neq 0$ slučaj I.

$$s_4 = -\cos\frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad t_4 = -1$$

$$r_4 t_4 - s_4^2 = +1 - \frac{1}{4} = +\frac{3}{4} > 0 \quad \text{slučaj I a)}$$

U točki $T\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ funkcija ima ekstrem i to maksimum, jer je $r_4 = -1 < 0$.

Četvrti korak.

$$z_{\min} = z\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi = -1 - 1 - 1 = \underline{-3}$$

$$z_{\text{maks}} = z\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{1{,}5} = z\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

4. Odredi ekstremne vrijednosti funkcije

$$z = x^2 - y^2 - 4x + 2y + 6$$

Prvi korak.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2$$

Drugi korak.

$$2x - 4 = 0 \qquad -2y + 2 = 0$$
$$x_0 = 2 \qquad y_0 = 1$$

Samo u točki $T_0(2, 1)$ može biti ekstrem.

Treći korak.

$r_0 = 2 \quad ; \quad s_0 = 0 \quad ; \quad t_0 = -2$

$r_0 = 2 \neq 0$ slučaj I. prema (101).

$r_0 t_0 - s_0^2 = -4 - 0 = -4 < 0$ slučaj I. b).

Funkcija nema ekstrema.

5. Pomoću ekstrema odredi koordinate središta i polumjer kugle

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 1 = 0$$

Prvi korak.

Prema (92a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - 6}{2z + 10}$$

i (92 b) $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y + 8}{2z + 10}$$

Drugi korak.

$$\frac{2x - 6}{2z + 10} = 0 \quad ; \quad 2x - 6 = 0 \quad ; \quad x_0 = 3$$

$$\frac{2y + 8}{2z + 10} = 0 \quad ; \quad 2y + 8 = 0 \quad ; \quad y_0 = -4$$

Treći korak. Otpada, jer znamo da kuglina ploha ima u istoj točki $T_0(x_0 = 3, y_0 = -4)$ ravnine XY maksimum i minimum.

Četvrti korak. Uvrštavamo $x_0 = 3$ i $y_0 = -4$ u zadanu jednadžbu kugline plohe, pa dobijemo z_{maks} i z_{min} :

$$9 + 16 + z^2 - 18 - 32 + 10z + 1 = 0$$

ili $$z^2 + 10z - 24 = 0$$

$$z_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 + 24}$$

$$z_1 = z_{maks} = -5 + 7 = +2$$

$$z_2 = z_{min} = -5 - 7 = -12$$

Koordinate središta kugle S: $x_0 = 3 \quad ; \quad y_0 = -4 \quad ; \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2 - 12}{2} = -5$

$$\underline{S(3, -4, -5)}$$

Polumjer kugle: $\underline{R} = \frac{z_1 - z_2}{2} = \frac{2 + 12}{2} = \underline{7}$

Kontrola.

Zadanu jednadžbu kugle prikažimo u obliku (61):

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z + 5)^2 = -1 + 9 + 16 + 25$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z + 5)^2 = 49$$

$$\underline{S(3, -4, -5)} \quad ; \quad \underline{R = 7}$$

6. Primjer iz analitičke geometrije u prostoru

Odredi najkraću međusobnu udaljenost mimosmjernih pravaca

$$p_1: \quad \frac{x - 5}{1} = \frac{y}{-16} = \frac{z + 4}{2}$$

$$p_2: \quad \frac{x - 27}{2} = \frac{y + 25}{1} = \frac{z - 1}{-2}$$

(vidi § 3, 3 i str 93).

Prelazimo na parametarski oblik jednadžbi pravaca:

$$p_1: \quad x = t_1 + 5 \qquad p_2: \quad x = 2t_2 + 27$$

$$y = -16t_1 \qquad y = t_2 - 25 \qquad \text{(a)}$$

$$z = 2t_1 - 4 \qquad z = -2t_2 + 1$$

Naš je zadatak, da odredimo one vrijednosti parametara t_1 i t_2, koje odgovaraju najbližim točkama zadanih mimosmjernih pravaca.

Znamo formulu (9) za kvadrat udaljenosti d dviju točaka u prostoru:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Uvrštenje jednadžbi (a) daje:

$$d^2 = (2t_2 - t_1 + 22)^2 + (t_2 + 16t_1 - 25)^2 + (-2t_2 - 2t_1 + 5)^2 \qquad \text{(b)}$$

Odredimo sada one vrijednosti parametara t_1 i t_2, za koje je d, odnosno d^2 minimum. Podesnije je uzeti d^2 mjesto d, zbog toga se točke ekstrema ne će promijeniti.

Prvi korak.

$$\frac{\partial(d^2)}{\partial t_1} = -2(2t_2 - t_1 + 22) + 32(t_2 + 16t_1 - 25) - 4(-2t_2 - 2t_1 + 5)$$

$$\frac{\partial(d^2)}{\partial t_2} = 4(2t_2 - t_1 + 22) + 2(t_2 + 16t_1 - 25) - 4(-2t_2 - 2t_1 + 5)$$

Drugi korak. Izjednačivši s nulom vrijednosti dobivene za parcijalne derivacije i uredivši tako dobivene izraze, dobijemo:

$$29t_1 + 2t_2 - 48 = 0$$

$$2t_1 + t_2 + 1 = 0$$

a odatle je $t_1 = 2$ i $t_2 = -5$.

Treći korak. Otpada, jer je maksimalna međusobna udaljenost mimosmjernih pravaca beskonačno velika i dobije se za $t_1 = \pm\infty$ i $t_2 = \pm\infty$, pa su $t_1 = 2$ i $t_2 = -5$ one vrijednosti parametara zadanih pravaca, koje odgovaraju najbližim točkama tih pravaca.

Četvrti korak. Uvrštenje $t_1 = 2$ i $t_2 = -5$ u (b) daje traženu najkraću međusobnu udaljenost zadanih mimosmjernih pravaca:

$$d_{min} = \sqrt{100 + 4 + 121} = \sqrt{225} = \underline{15}$$

Odredi ekstremne vrijednosti funkcija:

1) $z = -3x^2 - 2y^2 + 2xy + 10$ [u $(0, 0)$, $z_{maks} = 10$]

2) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ [u $(-1,1)$, $z_{min} = 2$]

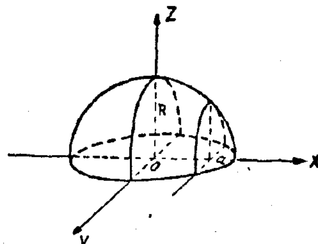
3) $z = x^3 + 3xy + y^3$ [u $(0, 0)$ nema ekstrema, u $(-1, -1)$ $z_{maks} = 1$]

4) $z = (x + y)^2 - (x + 5y + xy)$ [u $(-1, 3)$, $z_{min} = -7$]

Odredi najkraću međusobnu udaljenost mimosmjernih pravaca

$$\left.\begin{aligned} 13x + y - z - 7 &= 0 \\ 10x + y + 2z - 19 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 11x - 3y + 3z + 18 &= 0 \\ x - 6y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [d = 9]$$

d) Vezani ekstremi



Sl. 83

Dosada smo određivali ekstremne vrijednosti funkcije $z = f(x, y)$ mijenjajući slobodno x i y, jer su x i y bili nezavisni jedan od drugoga; drugim riječima, mi smo se slobodno kretali po ravnini XY, tražeći točke, u kojim zadana funkcija z ima ekstreme. Međutim, ako se traže ekstremne vrijednosti funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet, da je $\varphi(x, y) = 0$, t. j. ako je zadana funkcijska veza između nezavisnih promjenljivih x i y, imamo slučaj vezanih ekstrema. U tom slučaju tražimo ekstremne vrijednosti funkcije z idući u ravnini XY samo po krivulji, koja je zadana uvjetom $\varphi(x, y) = 0$.

Da pokažemo razliku između slobodnog i vezanog ekstrema, navedimo jednostavan primjer.

Slobodni ekstrem funkcije $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, koja predočuje gornju polovinu kugline plohe (vidi sl. 83), jest svakako $z_{maks} = z(0, 0) = R$ i njemu odgovara najviša točka polukugle. Međutim, vezani ekstrem, na pr. po pravcu $x = a$, funkcija postizava u točki $(a, 0)$ i taj iznosi $+\sqrt{R^2 - a^2}$; njemu odgovara najviša točka polukružnice, u kojoj ravnina $x = a$ siječe polukuglu.

Pokažimo, kako se može određivanje vezanog ekstrema zadane funkcije svesti na određivanje slobodnog ekstrema druge pomoćne funkcije.

Neka se traže ekstremne vrijednosti funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$.

Napisavši funkciju $\varphi(x, y) = 0$ u eksplicitnom obliku $y = y(x)$ i uvrstivši $y = y(x)$ u $z = f(x, y)$ dobijemo:

$$z = f[x, y(x)]$$

Sada z deriviramo po x prema (87):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Znamo, da je u točki ekstrema derivacija $\frac{dz}{\partial x} = 0.$
Imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(a)}$$

$\frac{dy}{dx}$ računamo iz $\varphi(x, y) = 0$ prema (90):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0 \; / \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Načinimo razmjer, čiju vrijednost označimo s $-\lambda$:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\lambda \qquad \text{(b)}$$

λ je neka konstanta, koja se zove Lagrange-ev multiplikator. Iz (b) slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

i $\qquad\qquad$ (c)

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Iz tih jednadžbi i vezanog uvjeta $\varphi(x, y) = 0$ računamo one vrijednosti x, y i λ, samo za koje funkcija $z = f(x, y)$ može imati vezane ekstreme.

Zadatak možemo pojednostaviti tako, da načinimo funkciju

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y) \qquad \text{(d)}$$

pa umjesto da tražimo točke vezanih ekstrema zadane funkcije $z = f(x, y)$, tražimo točke slobodnih ekstrema te funkcije $F(x, y)$, jer parcijalno derivirajući prema (d) funkciju $F(x, y)$ po x i po y i izjednačivši dobivene derivacije s nulom dobijemo jednadžbe (c).

Iz navedenog slijedi jednostavno pravilo:

Da se odrede točke, koje bi mogle biti točkama vezanih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet, da je $\varphi(x, y) = 0$, treba sastaviti pomoćnu funkciju $F(x, y)$ pribrojivši zadanoj funkciji $f(x, y)$ vezani uvjet $\varphi(x, y)$ pomnožen konstantnim koeficijentom λ:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

i izračunati nužne uvjete za slobodni ekstrem te pomoćne funkcije $F(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Te dvije jednadžbe zajedno s vezanim uvjetom

$$\varphi(x, y) = 0$$

čine sustav od tri jednadžbe, iz kojih određujemo vrijednost λ i koordinate x i y onih točaka, u kojima zadana funkcija $z = f(x, y)$ može imati vezane ekstreme.

Navedeni način određivanja točaka vezanih ekstrema zove se metoda Lagrange-evih multiplikatora. Pitanje, ima li zadana funkcija u točkama određenim na taj način ekstreme ili ih nema, rješavat ćemo po smislu svakog konkretnog zadatka.

Metoda Lagrange-evih multiplikatora primijenjuje se i za funkciju bilo kojeg broja nezavisnih promjenljivih.

Neka se traže vezani ekstremi funkcije n promjenljivih

$$u = f(x, y, z, \ldots, t)$$

uz m vezanih uvjeta, pri čemu je $m < n$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 (x, y, z, \ldots, t) &= 0 \\ \varphi_2 (x, y, z, \ldots, t) &= 0 \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \varphi_m (x, y, z, \ldots, t) &= 0 \end{aligned}$$

Ponovivši istu diskusiju, dolazimo do općeg pravila.

Da se odrede točke, u kojima bi mogli postojati vezani ekstremi zadane funkcije, treba sastaviti pomoćnu funkciju $F(x, y, z, \ldots, t)$, pribrojivši zadanoj funkciji vezane uvjete pomnožene s Lagrange-evim multiplikatorima:

$$F(x, y, z, \ldots, t) = f(x, y, z, \ldots, t) + \lambda_1 \cdot \varphi_1(x, y, z, \ldots, t) + \\ + \lambda_2 \cdot \varphi_2(x, y, z, \ldots, t) + \ldots + \lambda_m \cdot \varphi_m(x, y, z, \ldots, t) \tag{102a}$$

Izderiviravši funkciju F po svim n promjenljivima i izjednačivši dobivene derivacije s nulom, dobit ćemo zajedno sa m vezanih uvjeta $n + m$ jednadžbi, iz kojih možemo odrediti vrijednosti m multiplikatora $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ i n koordinata $x, y, z, \ldots, t$ točaka, u kojim zadana funkcija može imati ekstremne vrijednosti.

Primjeri, koji slijede, ilustriraju navedeno pravilo.

Primjeri

1. Odredi udaljenost točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$.

Označivši s $T(x, y, z)$ bilo koju točku zadane ravnine, bit će prema (9)

$$d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \tag{a}$$

kvadrat međusobne udaljenosti točaka T_1 i T.

Naš je zadatak, da odredimo one vrijednosti koordinata x, y i z, za koje je d, odnosno d^2 minimum i to uz uvjet, da je

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

jer točka (x, y, z) leži u zadanoj ravnini, pa njene koordinate moraju jednadžbu ravnine zadovoljavati.

Prema (102) načinimo pomoćnu funkciju:

$$F(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + \lambda \cdot (Ax + By + Cz + D)$$

Računamo parcijalne derivacije funkcije F i izjednačimo ih s nulom:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - x_1) + A\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - y_1) + B\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - z_1) + C\lambda = 0$$

Uz zadani uvjet

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

dobili smo četiri jednadžbe, iz kojih odredimo λ i vrijednosti koordinata x, y i z.

Iz prvih triju jednadžbi slijedi:

$$x = \frac{1}{2}(2x_1 - A\lambda)$$

$$y = \frac{1}{2}(2y_1 - B\lambda)$$

$$z = \frac{1}{2}(2z_1 - C\lambda)$$

Uvrštenje u četvrtu jednadžbu daje

$$\frac{A}{2}(2x_1 - A\lambda) + \frac{B}{2}(2y_1 - B\lambda) + \frac{C}{2}(2z_1 - C\lambda) + D = 0$$

Odatle računamo λ. Dobijemo:

$$\lambda = \frac{2\,(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Uvrštenje u jednadžbe (b) daje

$$x = x_1 - \frac{A(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y = y_1 - \frac{B(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z = z_1 - \frac{C(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Uvrstimo li te vrijednosti za x, y i z u (a), dobit ćemo

$$d^2 = \frac{(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

a odatle je

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Da je vrijednost dobivena za d traženi vezani minimum, slijedi iz toga, što naša funkcija nema drugih ekstrema. Uostalom, dobiveno rješenje je poznata nam formula (48a) za udaljenost točke od ravnine.

2. Od sviju trokuta zadanog opsega $2s$ odredi onaj, koji ima najveću površinu.[1]
Znamo Heronovu formulu za površinu P trokuta

$$P = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

ili

$$P^2 = s(s-x)(s-y)(s-z)$$

gdje su x, y i z stranice trokuta, a s je poluopseg trokuta

$$s = \frac{x + y + z}{2}$$

Tražimo, dakle, one vrijednosti stranica trokuta, za koje je P, odnosno P^2 maksimum, uz uvjet da je

$$x + y + z - 2s = 0$$

Načinimo funkciju F:

$$F = s(s-x)(s-y)(s-z) + \lambda(x + y + z - 2s)$$

Računamo parcijalne derivacije funkcije F i izjednačimo ih s nulom:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -s(s-y)(s-z) + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -s(s-x)(s-z) + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = -s(s-x)(s-y) + \lambda = 0$$
$$x + y + z - 2s = 0$$

Rješenja tog sustava jednadžbi daju one vrijednosti x, y, z i λ, samo za koje je površina P trokuta najveća.

Pomnožimo li prve tri jednadžbe redom s $(s-x)$, $(s-y)$ i $(s-z)$ dobit ćemo

$$\lambda \cdot (s-x) = s(s-x)(s-y)(s-z)$$
$$\lambda \cdot (s-y) = s(s-x)(s-y)(s-z)$$
$$\lambda \cdot (s-z) = s(s-x)(s-y)(s-z)$$

a odatle je

$$s-x = s-y = s-z$$

ili

$$x = y = z$$

Uvrštenje $x = y = z$ u vezani uvjet $x + y + z = 2s$ daje

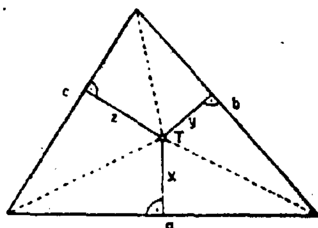
$$x = y = z = \frac{2s}{3}$$

Iz smisla samog zadatka slijedi, da smo time dobili tražene vrijednosti stranica trokuta, t. j. od svih trokuta zadanog opsega najveću površinu ima istostranični trokut.

$$P_{maks} = \sqrt{s\left(s - \frac{2s}{3}\right)^3} = \sqrt{s \cdot \frac{s^3}{3^3}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

ili

$$P_{maks} = s^2 \frac{\sqrt{3}}{9}$$



Sl. 84

3. U trokutu, u kojem su zadane sve tri stranice a, b i c, odredi položaj točke T tako, da umnožak udaljenosti te točke od stranica trokuta bude što veći.

Iz slike 84 vidimo, da se traže one vrijednosti x, y i z, za koje je $u = x \cdot y \cdot z$ = maksimum

Treba još sastaviti uvjet, koji veže tražene udaljenosti x, y i z. Površina trokuta, kako se vidi iz slike, iznosi

$$P = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} \qquad \text{(a)}$$

P je poznata veličina, jer iz zadanih stranica trokuta možemo površinu trokuta izračunati po Heronovoj formuli

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je $2s = a + b + c =$ opseg trokuta.

Prema tome jednakost (a) daje traženi uvjet veze između promjenljivih:

$$ax + by + cz - 2P = 0$$

Prema (102), sastavimo pomoćnu funkciju:

$$F = xyz + \lambda(ax + by + cz - 2P)$$

Deriviramo i izjednačimo derivacije s nulom:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + a\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + b\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + c\lambda = 0$$

uvjet veze: $ax + by + cz = 2P$

Odatle računamo vrijednosti λ i x, y, z, za koje naša funkcija $u = xyz$ može imati ekstrem.

Pomnožimo li prve tri jednadžbe redom s x, y i z, dobit ćemo:

$$xyz + a\lambda x = 0$$

$$xyz + b\lambda y = 0$$

$$xyz + c\lambda z = 0$$

Odatle: $a\lambda x = b\lambda y = c\lambda z = -xyz$

ili $ax = by = cz$

Uvrštenje u uvjet $ax + by + cz = 2P$

daje $3ax = 2P$

a odatle je

$$x = \frac{2P}{3a}$$

Na isti način dobijemo

$$y = \frac{2P}{3b}; \qquad z = \frac{2P}{3c}$$

Iz smisla zadatka slijedi, da za dobivene vrijednosti x, y i z ima funkcija $u = xyz$ maksimum.

$$u_{maks} = \frac{8P^3}{27abc}$$

4. Neka smo pomoću teodolita izmjerili uz najveću pažnju istom točnošću sva tri kuta jednog trokuta, za koje smo dobili vrijednosti α, β i γ. Uslijed neizbježivih pogrešaka mjerenja zbroj kutova je različit od 180°, t. j.

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w \qquad \text{(a)}$$

Pita se, kako ćemo podijeliti dobivenu nesuglasicu w na izmjerene kutove, da vrijednosti kutova najbolje odgovaraju rezultatima mjerenja i da zbroj kutova u trokutu iznosi 180°?

Problem riješimo u smislu teorije najmanjih kvadrata (vidi Dio I, § 15), koja kaže, da su najbolje vrijednosti mjerenih veličina one, za koje je suma kvadrata pogrešaka minimum.

Označivši, dakle, s x, y i z te najbolje vrijednosti kutova, izračunajmo sumu kvadrata pogrešaka, odnosno popravaka v. Ta se suma označuje u geodeziji s $[vv]$.

$$\begin{aligned} v_1 &= x - \alpha \\ v_2 &= y - \beta \\ v_3 &= z - \gamma \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Kvadriranje i zbrajanje daje.

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

Tražimo, dakle, one vrijednosti x, y i z kutova trokuta, za koje je $[vv] = min$, a osim toga mora biti $x + y + z = 180^\circ$.

Da sastavimo uvjet, koji veže pogreške v_1, v_2 i v_3, računamo iz (b):

$$\begin{aligned} \alpha &= x - v_1 \\ \beta &= y - v_2 \\ \gamma &= z - v_3 \end{aligned}$$

Uvrštenje u (a) daje

$$(x - v_1) + (y - v_2) + (z - v_3) - 180^\circ = w$$

ili

$$(x + y + z) - (v_1 + v_2 + v_3) - 180^\circ = w$$

a kako je $x + y + z = 180^\circ$, dobijemo

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \qquad \text{(c)}$$

Tražimo dakle ekstrem funkcije $[vv] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ uz uvjet:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0$$

Sastavimo pomoćnu funkciju F:

$$F = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \lambda \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + w)$$

Računamo:

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} = 2v_1 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_2} = 2v_2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_3} = 2v_3 + \lambda = 0$$

Odatle

$$v_1 = v_2 = v_3 = -\frac{\lambda}{2} \qquad \text{(d)}$$

Uvrštenje u (c) daje:

$$-\frac{3}{2}\lambda = w$$

i

$$\lambda = -\frac{2}{3}w$$

pa iz (d) dobijemo:

$$v_1 = v_2 = v_3 = -\frac{w}{3}$$

Kako funkcija $[vv]$ nema drugih ekstrema, bit će $[vv] = min$ za te vrijednosti pogrešaka v.

Prema (b) imamo konačno:

$$x = \alpha + v_1 = \underline{\alpha - \frac{w}{3}}$$

$$y = \beta + v_2 = \underline{\beta - \frac{w}{3}}$$

$$z = \gamma + v_3 = \underline{\gamma - \frac{w}{3}}$$

Nesuglasicu w treba podjednako podijeliti na sva tri izmjerena kuta trokuta!

Na isti način vrši se izjednačenje mjerenih veličina, koje su vezane s više uvjeta. Na pr. ako imamo n mjerenih veličina i m uvjetnih jednadžbi, koje vežu pogreške v s nesuglasicama w, pri čemu je $m < n$, tada pomoćna funkcija F ima prema (102a) oblik:

$F = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 + \lambda_1 \cdot$ (prva uvjetna jednadžba) $+ \lambda_2 \cdot$ (druga uvjetna jednadžba) $+ \ldots + \lambda_m$(m-ta uvjetna jednadžba).

Parcijalno derivirajući F po $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i izjednačujući te derivacije s nulom, dobijemo zajedno sa m uvjetnih jednadžbi sustav od $(m + n)$ jednadžbi, iz kojih računamo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ i tražene pogreške $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Primijetimo, da se u računu izjednačenja najprije određuju pomoću normalnih jednadžbi Lagrange-evi multiplikatori λ, koji nose ime **korelata**, a zatim se određuju popravci $v_1, v_2, \ldots, v_n$

16. Geometrijske primjene parcijalnih derivacija

Govoreći o singularnim rješenjima diferencijalnih jednadžbi (vidi Dio II. § 10. 2.e), spomenuli smo, da ta singularna rješenja predočuju geometrijski ovojnice (anvelope) familije krivulja, zadanih općim rješenjem diferencijalne jednadžbe, ili geometrijska mjesta singularnih točaka tih integralnih krivulja. Sada imamo priliku, da nešto opširnije promotrimo singularne, t. j. osobite ili neobične točke ravnih krivulja, i da kažemo nekolko riječi o ovojnicama.

a) Singularne točke ravnih krivulja

Neka je jednadžba ravne krivulje zadana u implicitnom obliku

$$F(x, y) = 0$$

Prema (90) izračunajmo gradijent tangente na tu krivulju u nekoj točki $T(x, y)$ krivulje:

$$tg\,\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Uz pretpostavku, da je u diralištu T tangente barem jedna od parcijalnih derivacija $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ različita od nule, bit će točka T obična točka zadane krivulje $F(x, y) = 0$. Međutim, ako su u nekoj točki $T_0(x_0, y_0)$ krivulje obje derivacije $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, tada dobivamo za gradijent tangente u toj točki T_0 neodređenu vrijednost

$$tg\,\alpha_0 = y_0' = -\frac{0}{0}$$

Smjer tangente na krivulju u točki T_0 ostaje, dakle, neodređen, pa se takva točka krivulje zove singularna.

Iz navedenog slijedi, da svaki par rješenja (x_0, y_0) sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{103}$$

daje koordinate singularnih točaka krivulje $F(x, y) = 0$, naravno uz uvjet, da ta krivulja ima singularne točke, jer je samo u tom slučaju $tg\,\alpha = y'_t = \frac{0}{0}$. Osim toga treba uzeti u obzir, da koordinate x_0 i y_0 singularne točke moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje $F(x, y) = 0$, jer singularna točka leži na toj krivulji.

Razlikujemo tri osnovna oblika singularnih točaka ravnih krivulja:

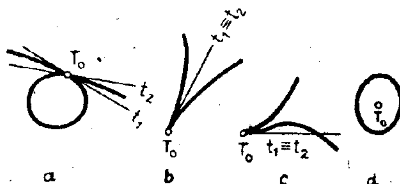
1) Dvostruka točka, u kojoj krivulja ima dvije različite tangente t_1 i t_2 (sl. 85a).

2) Šiljak prve i druge vrste, u kojem krivulja ima jednu (dvostruku) tangentu $t_1 \equiv t_2$ (sl. 85b i c).

3) Izolirana točka, u kojoj krivulja nema tangente (sl. 85d).

Da odredimo oblik singularne točke $T_0(x_0, y_0)$, u kojoj su obje parcijalne derivacije $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ zadane krivulje $F(x, y) = 0$ jednake nuli, računamo za tu točku diferencijalni izraz:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)_0^2 = r_0 t_0 - s_0^2$$



Sl. 85

koji nam je služio kao dovoljni uvjet za ekstrem funkcije $z = f(x, y)$. Do tog izraza dolazimo tako, da razvijemo zadanu funkciju $F(x, y) = 0$ po Taylor-ovoj formuli u okolišu singularne točke $T_0(x_0, y_0)$ pa zanemarivši članove viših redova, dobijemo kvadratnu jednadžbu u y'. Riješimo li tu kvadratnu jednadžbu, dobit ćemo za y' izraz, koji ima za diskriminantu

$$-(r_0 t_0 - s_0^2)$$

t. j. gore navedeni diferencijalni izraz s negativnim predznakom. Iz toga slijedi:

Ako je u singularnoj točki $T_0(x_0, y_0)$ krivulje $F(x, y) = 0$

$$r_0 t_0 - s_0^2 < 0 \tag{104a}$$

krivulja ima u točki T_0 dvostruku točku, jer je u tom slučaju diskriminanta $-(r_0 t_0 - s_0^2) > 0$, pa za gradijent tangente dobijemo dvije realne različite vrijednosti, t. j. krivulja ima u singularnoj točki dvije različite tangente (sl. 85a).

Znamo, da za $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ funkcija $z = f(x, y)$ nema ekstrema, a točka plohe je hiperbolna (tangentna ravnina dira plohu i siječe je).

Ako je

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0 \tag{104b}$$

krivulja ima u točki T_0 šiljak, jer je u tom slučaju diskriminanta jednaka nuli, pa se za y' dobije samo jedna vrijednost. Krivulja ima u singularnoj točki jednu (dvostruku) tangentu (sl. 85b i c).

Znamo, da je $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ neodlučan slučaj pri određivanju ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ i da je točka plohe parabolna (tangentna ravnina dira plohu u pravcu ili krivulji).

Konačno, ako je

$$r_0 t_0 - s_0^2 > 0 \tag{104c}$$

singularna točka $T_0(x_0, y_0)$ je **izolirana točka**, jer je u tom slučaju diskriminanta $-(r_0t_0 - s_0^2) < 0$, pa se za y' dobiju konjugirano kompleksne vrijednosti. Krivulja nema u točki T_0 tangente (sl. 85d).

Znamo, da za $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ funkcija $z = f(x, y)$ ima ekstrem, a točka plohe je eliptička (tangentna ravnina dira plohu u jednoj točki).

Nastaje pitanje, zašto postoji veza između singularnih točaka ravnih krivulja $F(x, y) = 0$ i oblika plohe $z = f(x, y)$. Odgovor je jasan svakome, tko se sjeti onoga, što smo prije rekli o prostornom značenju ravnih krivulja. Svaku ravnu krivulju u ravnini XY možemo smatrati kao prijesjek plohe $z = f(x, y)$ i ravnine XY, kojoj je jednadžba $z = 0$, odnosno kao projekcija na ravninu XY krivulje, u kojoj ravnina $z = c$, koja je paralelna s ravninom XY, siječe zadanu plohu.

Tako, na pr., siječemo li kuglinu plohu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ravninom XY $(z = 0)$, dobijemo kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ sa središtem u ishodištu, dok ravnina $z = r$, koja je paralelna s ravninom XY a udaljena od nje za r, dira kuglu u najvišoj točki plohe (u maksimumu). Projekcija te točke pada u ishodište, i daje izoliranu točku $O(0, 0)$. Stvarno, uvrštenje $z = r$ u jednadžbu kugle daje

$$x^2 + y^2 = 0$$

a odatle je $x = 0$ i $y = 0$, jer je samo za $x = 0$ i $y = 0$ zbroj kvadrata jednak nuli.

Primjeri

1. Odredi singularne točke krivulje

$$y^2 = x(x-1)^2$$

Napisavši jednadžbu zadane krivulje u obliku

$$F(x, y) \equiv y^2 - x(x-1)^2 = 0$$

računamo prema (103):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -x \cdot 2(x-1) - (x-1)^2$$

ili

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -(x-1)[2x + (x-1)]$$

ili

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -(x-1)(3x-1) \qquad \text{(a)}$$

dok je

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \qquad \text{(b)}$$

Odatle:

$$(x-1)(3x-1) = 0$$

pa je

$$x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

i

$$2y = 0$$

pa je

$$y_1 = 0$$

Za $x_1 = 1$ i $y_1 = 0$, a također za $x_2 = \frac{1}{3}$ i $y_2 = 0$ poništavaju se istodobno obje parcijalne derivacije zadane funkcije F.

Međutim, koordinate točke $(x_1 = 1, y_1 = 0)$ zadovoljavaju jednadžbu zadane krivulje $y^2 = x(x-1)^2$, jer uvrštenje daje

$$0 = 0$$

dok druga točka $(x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = 0)$ ne pripada krivulji, jer njene koordinate ne zadovoljavaju jednadžbu krivulje. Prema tome zadana krivulja ima samo singularnu točku $T_0(1, 0)$ na osi X.

Da odredimo oblik te singularne točke računamo

$$r_0 t_0 - s_0^2$$

u toj točki $T_0(1, 0)$.

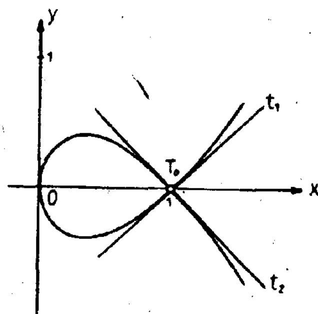
Prema (a) i (b) imamo:

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -[(x-1)3 + (3x-1)] \quad ; \quad r_0 = -2$$

$$s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad ; \quad s_0 = 0$$

$$t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \quad ; \quad t_0 = 2$$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = -2 \cdot 2 - 0 = -4 < 0$$



Sl. 86

Prema (104a) zaključujemo, da je singularna točka $T_0(1, 0)$ dvostruka točka (vidi sl. 86).

2. Odredi singularne točke polukubne parabole

$$y^2 = x^3$$

Računamo prema (103):

$$F(x, y) \equiv y^2 - x^3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3x^2 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

Sustav jednadžbi

$-3x^2 = 0$ $2y = 0$	daje	$x_0 = 0$ $y_0 = 0$	koordinate singularne točke T_0, jer zadovoljavaju i jednadžbu zadane krivulje.

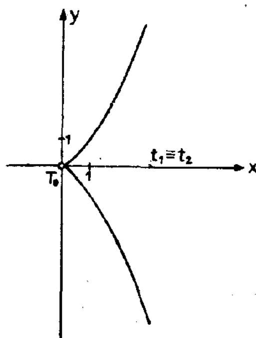
$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6x \quad ; \quad r_0 = 0$$

$$s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = 0 \quad ; \quad s_0 = 0$$

$$t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \quad ; \quad t_0 = 2$$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0 \cdot 2 - 0 = 0$$

Prema (104b) zaključujemo, da krivulja ima u ishodištu šiljak i to prve vrste, jer iz jednadžbe polukubne parabole $y = \pm \sqrt{x^3}$ slijedi, da je krivulja simetrična na os X (vidi sl. 87).



Sl. 87

3. Odredi singularne točke krivulje.

$$y^2 = x^2(x - 1)$$

Prema (103):

$$F(x, y) \equiv y^2 - x^3 + x^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3x^2 + 2x \; ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

Iz $\quad -3x^2 + 2x = 0$, odnosno $-x(3x - 2) = 0$

i iz $\quad 2y = 0$ slijedi:

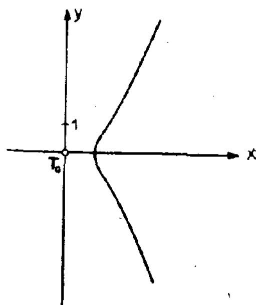
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$y_1 = 0 \qquad y_2 = 0$$

Krivulja ima jednu singularnu točku $T_0(0, 0)$ u ishodištu, jer koordinate druge točke $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ne zadovoljavaju jednadžbu zadane krivulje:

$$\begin{aligned} r &= -6x + 2 \; ; & r_0 &= 2 & r_0 t_0 - s_0^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \\ s &= 0 \; ; & s_0 &= 0 \\ t &= 2 \; ; & t_0 &= 2 \end{aligned}$$

Prema (104c) slijedi, da krivulja ima u $T_0(0, 0)$ izoliranu točku (vidi sl. 88).



Sl. 88

Odredi singularne točke krivulja i nariši njihove slike:

1. $y^2 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ [nema singularnih točaka]
2. $y^2 = (x - 1)(x - 2)^2$ [dvostruka točka (2, 0)]
3. $y^2 = (x - 1)^2(x - 3)$ [izolirana točka (1, 0)]
4. $(y - x)^2 = x^5$ [šiljak (0, 0)]
5. $y^3 = 6x^2 - x^3$ [šiljak (0, 0)]

b) Ovojnica (anvelopa) familije ravnih krivulja

Znamo, da jednadžba $F(x, y, \alpha) = 0$, odnosno $y = f(x, \alpha)$, koja, kako vidimo, sadrži osim promjenljivih x i y još i parametar α, koji može primiti različite numeričke vrijednosti, predočuje geometrijski familiju krivulja, koja ovisi o jednom parametru α.

Tako na pr. jednadžba

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$

predočuje familiju kružnica čvrstog polumjera R sa središtima na osi X, pri čemu sve te kružnice diraju pravce $y = +R$ i $y = -R$. Kako ta dva pravca $y = \pm R$ omotavaju kružnice familije, nazvali smo ih ovojnicom ili anvelopom te familije (vidi Dio II. sl. 97).

Isto tako je parabola $y = -\frac{x^2}{2}$ ovojnica familije pravaca zadanih jednadžbom $y = \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}$, jer tangira u svakoj svojoj točki onaj pravac familije, koji prolazi tom točkom (vidi Dio II. sl. 98).

Iz navedenog jasno slijedi, da se pod ovojnicom zadane familije krivulja, koja ovisi o jednom parametru α, razumije općenito krivulja, koja u svakoj svojoj točki dira jednu krivulju familije pa ima s njome zajedničku tangentu.

Uzevši u obzir, da svaka točka ovojnice leži na jednoj od krivulja familije i ima u toj točki zajedničku tangentu s dotičnom krivuljom familije, možemo lako doći do jednadžbe ovojnice zadane familije krivulja $F(x, y, \alpha) = 0$.

U tu svrhu treba

1. parcijalno derivirati po parametru α zadanu jednadžbu familije krivulja $F(x, y, \alpha) = 0$, smatrajući, da su sve ostale promjenljive konstantne veličine,

2. ukloniti iz tako dobivene jednadžbe i zadane jednadžbe familije, t. j. iz jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} &= 0 \\ F(x, y, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

parametar α, pa se dobije jednadžba $f(x, y) = 0$ tražene ovojnice.

Izračunamo li iz tih jednadžbi x i y kao funkcije parametra α:

$$x = x(\alpha)$$
$$y = y(\alpha)$$

dobit ćemo jednadžbu ovojnice u parametarskom obliku.

Primjeri

Odredi jednadžbe ovojnica:

1. Familije kružnica

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$

Deriviramo li prema (105) zadanu jednadžbu po parametru α, dobijemo

$$-2(x - \alpha) = 0$$

a odatle je

$$x - \alpha = 0$$

Uvrštenje u zadanu jednadžbu familije kružnica daje traženu jednadžbu ovojnice

$$y^2 = R^2$$

ili

$$\underline{y = \pm R}$$

2. Familije pravaca

$$y = \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}$$

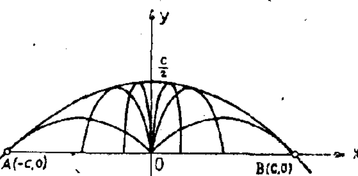
Deriviramo parcijalno po α prema (105):

$$x + \alpha = 0$$

a odatle je

$$\alpha = -x$$

Uvrštenje u zadanu jednadžbu familije daje



Sl. 89

$$y = -x^2 + \frac{x^2}{2}$$

ili

$$\underline{y = -\frac{x^2}{2}}$$ jednadžba ovojnice (parabole).

3. Familije parabola

$$y = \alpha x - \frac{x^2}{2c}(1 + \alpha^2)$$

Iz zadane jednadžbe vidimo, da sve parabole familije prolaze kroz ishodište koordinatnog sustava i da su osi parabola okomite na os X (vidi sl. 89).

Da odredimo geometrijsko značenje parametra α, derivirajmo po x zadanu jednadžbu:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha - \frac{1 + \alpha^2}{2c} \cdot 2x$$

a u ishodištu O (0, 0):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \alpha = \text{gradijent tangente na bilo koju parabolu familije u ishodištu!}$$

Da odredimo jednadžbu ovojnice zadane familije parabola, derivirajmo parcijalno po α jednadžbu te familije:

$$y = \alpha x - \frac{x^2}{2c}(1 + \alpha^2) \qquad \text{(a)}$$

Dobijemo:

$$0 = x - \frac{x^2}{2c} \cdot 2\alpha$$

Odatle računamo α:

$$\alpha = \frac{c}{x}$$

Uvrštenje u (a) daje traženu jednadžbu ovojnice:

$$y = c - \frac{x^2}{2c}\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right)$$

ili

$$y = c - \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}$$

ili

$$\underline{y = \frac{c}{2} - \frac{x^2}{2c}}$$

To je opet parabola, kojoj je vrh na osi Y u točki $\left(0, \frac{c}{2}\right)$, a presjeci s osi X jesu $A(-c, 0)$ i $B(c, 0)$ (sl. 89).

4. Odrezak AB duljine c nekog pravca p pomiče se tako, da točka A ostaje uvijek na osi X, a točka B na osi Y. Odredi ovojnicu te familije pravaca.

Prema slici 90 jednadžba pravca AB glasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

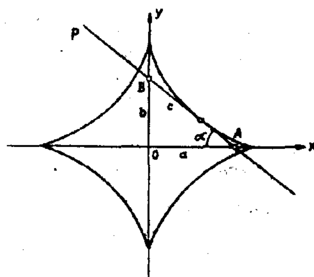
ili, ako uvedemo parametar α i uzmemo u obzir, da je tada prema slici

$$a = c \cdot \cos\alpha \qquad \text{i} \qquad b = c \cdot \sin\alpha$$

dobit ćemo

$$\frac{x}{c \cdot \cos\alpha} + \frac{y}{c \cdot \sin\alpha} = 1 \,/\cdot c$$

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = c \qquad \text{(a)}$$



Sl. 90

jednadžbu familije zadanih pravaca.

Prema (105) derivirajmo tu jednadžbu parcijalno po α:

$$\frac{x \sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{y \cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Da dobijemo jednadžbu tražene ovojnice u parametarskom obliku, riješimo po x i y sustav, što ga čine jednadžbe (a) i (b).

Dobijemo

$$\begin{aligned} x &= c\cos^3\alpha \\ y &= c\sin^3\alpha \end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

a to je astroida u parametarskom obliku.

Da dobijemo jednadžbu astroide u običnom obliku, uklonimo parametar α iz jednadžbi (c). U tu svrhu dignemo obje jednadžbe (c) na potenciju $\frac{2}{3}$. Dobijemo:

$$\begin{aligned} x^{\frac{2}{3}} &= c^{\frac{2}{3}} \cdot \cos^2\alpha \\ y^{\frac{2}{3}} &= c^{\frac{2}{3}} \cdot \sin^2\alpha \end{aligned} \quad +$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}} \qquad \text{(vidi sl. 90).}$$

Odredi ovojnice i nariši njihove slike:

1. familije kružnica $x^2 + (y - \alpha)^2 = \frac{\alpha^2}{2}$ $\quad [y = \pm x]$

2. familije pravaca $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 4 = 0$ $\quad [x^2 + y^2 = 16]$

3. familije elipsa stalnog zbroja 5 poluosi

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{(5-\alpha)^2} = 1 \qquad [x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} \ldots \text{ astroida}]$$

Jednadžbe (105) za određivanje ovojnice zadane familije krivulja $F(x, y, \alpha) = 0$ postavili smo uz pretpostavku, da krivulje te familije imaju ovojnice. Međutim, ta pretpostavka nije uvijek opravdana. Ima familija krivulja, koje nemaju ovojnice. Kao primjer navedimo familiju koncentričnih kružnica sa zajedničkim središtem u ishodištu koordinatnog sustava

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \tag{a}$$

gdje je parametar α polumjer kružnica.

Deriviramo li tu jednadžbu parcijalno po α, dobijemo

$$0 = 2\alpha$$

ili

$$\alpha = 0$$

pa uvrštenje u (a) daje

$$x^2 + y^2 = 0$$

Realna rješenja te jednadžbe jesu $x = 0$ i $y = 0$, a to su koordinate ishodišta. Nismo dobili ovojnice, jer je nema, već samo zajedničko središte svih kružnica familije.

Pokažimo sada, da će jednadžbe (105) zadovoljavati i koordinate singularnih točaka zadane familije krivulja ili, drugim riječima: jednadžbe (105) daju geometrijska mjesta singularnih točaka zadane familije krivulja $F(x, y, \alpha) = 0$, naravno, ako te krivulje imaju singularne točke.

Da to pokažemo, pretpostavimo, da zadana familija krivulja $F(x, y, \alpha) = 0$ ima singularne točke, čije je geometrijsko mjesto krivulja k. Budući da točke te krivulje leže na krivuljama zadane familije, vrijednosti koordinata x i y krivulje k moraju zadovoljavati za neke vrijednosti parametra α jednadžbu $F(x, y, \alpha) = 0$ zadane familije. Iz toga slijedi, da su koordinate x i y točaka krivulje k neke posve određene funkcije parametra α, t. j.

$$x = x(\alpha) \quad \text{i} \quad y = y(\alpha)$$

Uvrštenje u $F(x, y, \alpha) = 0$ daje

$$F[x(\alpha), y(\alpha), \alpha] = 0$$

Derivirajmo F po α po pravilu za deriviranje složenih funkcija:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \tag{a}$$

Kako je prema (103) u singularnoj točki krivulje $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ i $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, u jednadžbi (a) ostaje

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$$

a to je prva jednadžba sustava (105).

Prema tome iste jednadžbe (105), pomoću kojih smo određivali ovojnice,

$$\frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}=0$$

$$F(x, y, \alpha)=0$$

daju također geometrijsko mjesto singularnih točaka familije krivulja $F(x,y,\alpha)=0$.

Iz navedenog slijedi, da jednadžbe (105) određuju ovojnicu, ako ona postoji, ili geometrijsko mjesto singularnih točaka krivulje, ako krivulje familije imaju singularne točke, ili ne određuju ni jedno ni drugo, ako zadana familija krivulja nema ovojnice, a krivulje familije nemaju singularnih točaka.

Na pr. jednadžbe (105) daju za familiju polukubnih parabola

$$x^3-(y-\alpha)^2=0$$

geometrijsko mjesto šiljaka (vidi primjer 2. na str. 205) i to os Y, jer je

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}=+2(y-\alpha)=0$$

ili

$$y-\alpha=0$$

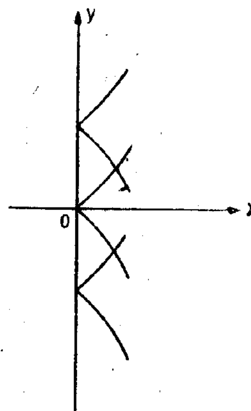
a uvrštenje u jednadžbu familije daje

$$x^3=0$$

ili

$$\underline{x=0}\ldots\ldots \text{os } Y$$

(vidi sl. 91).



Sl. 91

Odredi za vježbu geometrijsko mjesto singularnih točaka familije krivulja $y^2-(x-\alpha)^3=0$. [Šiljci prve vrste, $y=0$].

§ 5. VIŠESTRUKI ODREĐENI INTEGRALI I NJIHOVA PRIMJENA

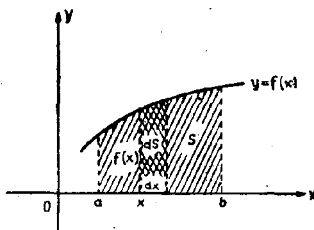
1. Dvostruki integrali

a) Pojam, geometrijsko značenje i računanje

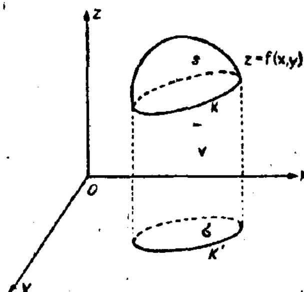
Definirajući obični određeni integral, istakli smo u prvom redu njegovo geometrijsko značenje, pa smo rekli, da taj integral predočuje geometrijski površinu S omeđenu lukom krivulje $y = f(x)$, odreskom osi X od $x = a$ do $x = b$ i ordinatama krivulje povučenim u tim krajnim točkama intervala:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

(Vidi sl. 92 i Dio II. § 6).



Sl. 92



Sl. 93

Slično tome predočuje geometrijski dvostruki integral funkcije $z = f(x, y)$ obujam V tijela, koje je omeđeno zadanom plohom S jednadžbe $z = f(x, y)$, ortogonalnom projekcijom σ te plohe na ravninu XY i valjkastom plohom okomitom na ravnini XY, kojom se kontura k zadane plohe S projicira na ravninu XY (vidi sl. 93).

Dok su granice integracije jednostrukog određenog integrala linearne (od $x = a$ do $x = b$), kod dvostrukog integrala područje integracije je dvodimenzionalno — dio σ ravnine XY, a omeđeno je krivuljom k' (vidi sl. 93).

Prema tome pišemo:

$$\text{Volumen } V = \iint_\sigma f(x, y)dx\,dy \tag{106}$$

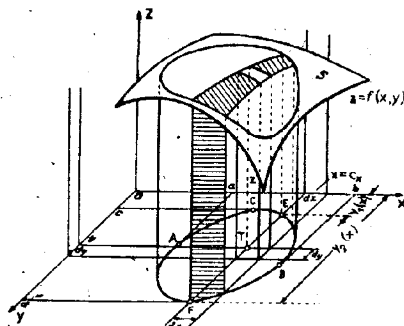
t. j. volumen V tijela ispod plohe S, koja ima jednadžbu $z = f(x, y)$, jednak je dvostrukom integralu funkcije $z = f(x, y)$ uzetom po dvodimenzionalnom području σ ravnine XY.

Nastaje pitanje, kako ćemo izračunati taj dvostruki integral, t. j. kako ćemo odrediti obujam V toga tijela?

Opet ćemo postupati kao u slučaju jednostrukog integrala: računajući površinu S ispod luka krivulje $y = f(x)$ (vidi sl. 92), uzeli smo neki x po volji, njemu smo dali beskonačno mali prirast dx pa nacrtavši ordinate krivulje, dobili smo element $dS = f(x)dx$ tražene površine S. Integrirajući od $x = a$ do $x = b$, dobili smo traženu površinu S.

Kako je u našem sadašnjem slučaju područje integracije dvodimenzionalno, uzet ćemo po volji ne samo x, već i y, pa ćemo njima dati priraste dx i dy, koje ćemo smatrati, da su beskonačno mali. Zamislimo li sada, da tim točkama prolaze ravnine, koje su paralelne s ravninama YZ i XZ, isjeći će te ravnine iz tjela, čiji volumen tražimo, jedan prizmatički stupić, kojemu je površina osnovke

$$d\sigma = dx \cdot dy$$



Sl. 94

Taj stupić predočuje element zadanog tijela, a kako smo uzeli da su dx i dy beskonačno male veličine, možemo ga smatrati da je prizma, kojoj je visina aplikata $f(x, y)$ zadane plohe S u točki $T(x, y)$, pa volumen dV toga elementa možemo lako izračunati kao umnožak površine baze i visine:

$$dV = f(x, y) \cdot d\sigma = f(x, y) \cdot dx\, dy$$

(vidi sl. 94).

Sada ćemo sumirati te stupiće, da dobijemo isprva volumen sloja debljine dx zadanog tijela, a zatim, sumirajući slojeve, i traženi volumen čitava tijela. Kako je područje integracije σ dvodimenzionalno, moramo to sumiranje provesti u dva smjera:

prvo u smjeru osi Y, a zatim u smjeru osi X, ili obratno:
prvo u smjeru osi X, a zatim u smjeru osi Y.

Uzet ćemo najprije prvi način. U tu svrhu pretpostavimo, da je prije po volji uzeti x neka konstanta $x = k$ i izračunajmo volumen sloja tijela debljine dx (vidi sl. 94). Da odredimo volumen toga sloja, moramo integrirati po y, idući od točke E stražnjeg dijela krivulje k', koja omeđuje područje σ, do točke F njena prednjeg dijela. Zato treba znati jednadžbu krivulje k', za koju pretpostavljamo, da pravci paralelni s osi Y sijeku tu krivulju najviše u dvjema točkama. Neka je $y = y(x)$ ta jednadžba.

Povućemo tangente, koje su paralelne s osi Y na tu medašnu krivulju k'. Te tangente sijeku os X u točkama $x = a$ i $x = b$, a diraju krivulju k' u točkama A i B Ta dirališta A i B dijele medašnu krivulju k', kojoj je jednadžba $y = y(x)$, u dva dijela: stražnji AEB i prednji AFB. Neka je $y_1(x)$ jednadžba dijela AEB, a $y_2(x)$ jednadžba dijela AFB. Traženi volumen sloja dobijemo sumirajući stupiće i to idući od E do F, t. j. integrirajući po y od $y_1(x)$ do $y_2(x)$:

$$\text{volumen sloja debljine } dx\text{:} \quad \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

Sada kad smo volumen sloja izračunali, sumirat ćemo slojeve idući u smjeru osi X od dirališta A do dirališta B, t. j. integrirat ćemo po x izraz dobiven za volumen sloja i to, kako se jasno vidi iz slike 94, od $x = a$ do $x = b$, pa tako dobijemo traženi volumen tijela V:

$$V = \iint_{\sigma} f(x, y) dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \qquad (106a)$$

Kako smo već spomenuli, do istog rezultata dolazimo, ako sloj traženog volumena uzmemo u smjeru osi X i izračunavši volumen toga sloja debljine dy, sumiramo slojeve idući po osi Y od $y = c$ do $y = d$ (vidi sl. 94). U tom slučaju integriramo najprije po x smatrajući da je y neka konstanta i idući od $x_1(y)$ do $x_2(y)$, gdje su $x_1(y)$ i $x_2(y)$ jednadžbe lijevog i desnog dijela međašne krivulje k', a zatim integriramo po y idući od $y = c$ do $y = d$. Na taj način dobijemo:

$$V = \iint_{\sigma} f(x, y) dx\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \qquad (106b)$$

U tom slučaju pretpostavljamo, da pravci paralelni s osi X sijeku konturu k' područja integracije σ najviše u dvije točke.

Kako se vidi, računanje dvostrukog integrala svodi se na računanje dvaju jednostrukih određenih integrala.

Iz toga slijedi, da sva svojstva jednostrukog određenog integrala (vidi Dio II. § 6) možemo prenijeti na dvostruki integral:

1) konstanta, koja množi podintegralnu funkciju, stavi se uvijek ispred znaka dvostrukog integrala;

2) dvostruki integral konačnog zbroja funkcija jednak je zbroju dvostrukih integrala tih funkcija.

3) Rezultat dvostrukog integriranja daje algebarsku sumu volumena, jer volumen tijela, koji leži ispod ravnine XY, ulazi u rezultat integriranja s predznakom minus.

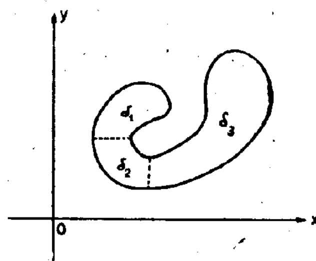
Prema tome, hoćemo li da dobijemo pravi volumen tijela, odnosno apsolutnu vrijednost dvostrukog integrala funkcije $z = f(x, y)$, koja mijenja predznak u području integracije σ, treba posebno izračunati dvostruki integral, koji daje volumen onog dijela tijela, koji se nalazi iznad ravnine XY, a posebno integral za onaj dio volumena tijela, koji leži ispod ravnine XY. Zbroj apsolutnih vrijednosti tih integrala dat će traženi pravi volumen tijela. Općenito je dakle:

$$V = \iint_{\sigma} f(x, y) dx\, dy$$

4) Područje integracije σ možemo razdijeliti u konačan broj dijelova $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, pa dvostruki integral računati u obliku

$$\iint_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\sigma_1} f(x, y) dx\, dy +$$

$$+ \iint_{\sigma_2} f(x, y)\, dx\, dy + \ldots + \iint_{\sigma_n} f(x, y) dx\, dy$$



Sl. 95

To svojstvo dvostrukog integrala ima veliko praktičko značenje u slučaju, kada pravci paralelni s koordinatnim osima X i Y sijeku krivulju k', koja ome-

duje područje integracije σ, više nego u dvije točke. U tom slučaju treba područje integracije σ razdijeliti u dijelove tako, da ti pravci sijeku konturu svakog pojedinog dijela područja najviše u dvije točke. Na slici 95 područje integracije σ podijeljeno je na taj način u tri dijela σ_1, σ_2 i σ_3.

Pri računanju dvostrukih integrala moramo držati na pameti:

1) Računajući volumen sloja zadanog tijela, t. j. drugog integrala u formuli (106a), smatramo da je x konstanta, pa granice integracije $y_1(x)$ i $y_2(x)$ uvrštavamo samo u y, dok pri upotrebi formule (106b) smatramo da je y konstanta, pa granice integracije $x_1(y)$ i $x_2(y)$ uvrštavamo samo u x. Nakon uvrštenja granica pretvara se podintegralna funkcija $f(x, y)$ u funkciju od samoga x, odnosno od samoga y, pa se iza toga lako računa prvi integral.

2) Da su granice prvog integrala uvijek konstantne, dok su granice drugog integrala obično funkcije od x, odnosno od y.

3) Da težina računanja dvostrukih integrala leži za svakoga tko zna izračunati obične jednostruke integrale jedino u određivanju granica integracije, pa određivanju tih granica moramo posvetiti osobitu pažnju pri rješavanju bilo kojeg zadatka pomoću dvostrukih integrala.

4) Da pri izboru redoslijeda integriranja, t. j. formule (106a), odnosno formule (106b), treba uzeti u obzir funkciju, koja se dobije nakon prvog integriranja, a također oblik konture k' područja integracije. Uvijek ćemo izabrati onaj redoslijed integriranja, odnosno onu od formula (106), koja nakon prvog integriranja i uvrštenja granica daje funkciju, koju možemo lakše ponovno integrirati. U drugu ruku podesnim izborom redoslijeda integriranja možemo kadšto dva dvostruka integrala svesti na jedan.

Navedeno ilustrirat ćemo s više primjera, ali prije moramo učiniti još jednu važnu primjedbu.

Slično, kako smo u Dijelu II. Repetitorija najprije izveli geometrijsko značenje običnog određenog integrala, a tek zatim naveli mnogobrojne primjene tog integrala, tako smo i sada dali samo geometrijsko značenje dvostrukog integrala smatrajući ga kao volumen tijela. Kasnije ćemo vidjeti [vidi 5. ovog §] mnogobrojnu primjenu dvostrukih integrala: pomoću tih integrala rješavaju se raznovrsni problemi, koji traže integriranje funkcije dviju nezavisnih promjenljivih po nekom području koordinatne ravnine ili zadane plohe.

Primjeri

1. Odredi volumen tijela omeđenog plohom:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$x \geqslant 0$$
$$y \geqslant 0$$
$$z \geqslant 0$$

Prva jednadžba predočuje, kako znamo, jednadžbu ravnine zadane u segmentnom obliku, dok ostale tri jednadžbe određuju prvi oktant pravokutnog koordinatnog sustava.

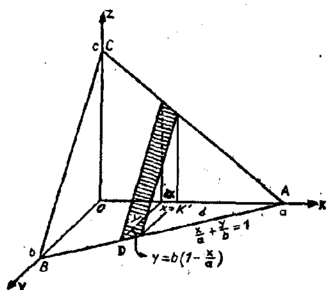
Traži se, dakle, volumen piramide, prikazan na sl. 96, odnosno volumen tijela, koje je omeđeno zadanom ravninom i trima koordinatnim ravninama.

Svaki srednjoškolac lako će nam izračunati taj volumen:

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot c = \frac{abc}{6}$$

Ipak ćemo rješiti taj zadatak pomoću dvostrukog integrala, da još jednom uočimo strukturu tog integrala.

Kako vidimo iz slike 96, u zadanom je primjeru područje integracije pravokutni trokut AOB s katetama a i b, pa prikazavši jednadžbu zadane ravnine u eksplicitnom obliku



Sl. 96

$$z(x,y) = c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

pišemo prema (106), postavivši konstantu c ispred znaka dvostrukog integrala, da je volumen

$$V = c\iint\limits_{\Delta AOB}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dx\,dy$$

Sada prema (106a) rastavimo taj dvostruki integral u dva jednostruka:

$$V = c\int dx\int\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy$$

i pređimo na određivanje granica integracije.

Najprije odredimo granice drugog integrala, koji, kako znamo, daje volumen sloja debljine dx, a dobije se integracijom po y. U tu svrhu uzmemo neki konstantni x, njemu dodamo prirast dx i konstruiramo sloj zadanog tijela povukavši ravnine paralelne s ravninom YZ (vidi sl. 96). Iz slike jasno vidimo, da je donja granica drugog integrala $y = 0$, jer polazimo od osi X idući u smjeru osi Y, dok je gornja granica krajnja točka D ordinate y pravca AB. Potrebna nam je dakle jednadžba pravca AB, da izrazimo s x tu ordinatu y. Taj pravac siječe na osima X i Y segmente a i b, pa njegova jednadžba glasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Odatle

$$y = b\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

To je gornja granica drugog integrala, pa imamo

$$V = c\int dx\int\limits_{0}^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy$$

Sada sumiramo slojeve tijela, t. j. integriramo po x. Iz slike se jasno vidi, da se kod toga x mijenja od 0 do a.

Imamo dakle

$$V = c\int\limits_{0}^{a} dx\int\limits_{0}^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy$$

Prelazimo na integriranje. Uvijek se najprije računa d r u g i integral. Kako je pri računanju tog integrala x konstanta, pišemo ga u obliku

$$V = c\int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left[\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{b}\,y\right] dy$$

i integriramo član po član postavivši konstante ispred znaka integrala, a prvi integral kod toga uvijek prepisujemo:

$$V = c\int_0^a dx \left[\left(1-\frac{x}{a}\right)\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy - \frac{1}{b}\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} y\, dy\right]$$

pa je

$$V = c\int_0^a dx \left|\left(1-\frac{x}{a}\right)y - \frac{1}{b}\cdot\frac{y^2}{2}\right|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$

Sada uvrštavamo granice integracije, ali samo u y, jer je x konstanta:

$$V = c\int_0^a dx\left[b\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{2b}\; b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 - 0\right]$$

Odatle

$$V = \frac{bc}{2}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx.$$

Dobili smo obični integral funkcije od x. Integriramo:

$$V = \frac{bc}{2}\int_0^a \left(1-2\,\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

Odatle

$$V = \frac{bc}{2}\left|x - \frac{2}{a}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{bc}{2}\left(a-\frac{a^2}{a}+\frac{a^3}{3a^2}\right)$$

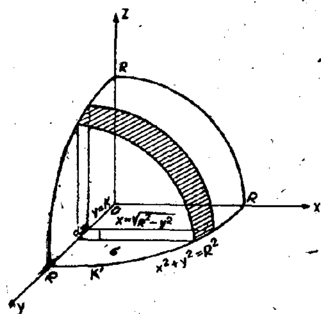
Konačno

$$\underline{V = \frac{abc}{6}}$$

Riješi za vježbu isti zadatak po formuli (106b), t. j. uzevši sloj volumena u smjeru osi X. i nariši pripadnu sliku. Integral će sada glasiti

$$V = c\iint_{\Delta AOB}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) dx\, dy = c\int_0^b dy\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)}\left(1-\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right) dx$$

Naravno treba dobiti isti rezultat.



Sl. 97

2. Izračunaj obujam kugle polumjera R (sl. 97).

Budući da je kugla simetrična obzirom na sve tri koordinatne ravnine, računat ćemo volumen oktanta kugle, t. j. $\frac{V}{8}$, a radi vježbanja integrirat ćemo prvo po x, a zatim po y [formula (106b)].

Napisavši jednadžbu kugline plohe (sfere) u eksplicitnom obliku

$$z(x, y) = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

računamo prema (106b) volumen oktanta kugle.

$$\frac{V}{8} = \iint_{\sigma} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int dy \int \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx$$

Uočivši, da je područje integracije kvadrant kruga polumjera R, prelazimo na određivanje granica integracije. U tu svrhu uzmemo neki konstantni y $(y = k)$ i narišimo sloj kugle debljine dy. Iz slike 97 vidimo, da su granice drugog integrala $x = 0$ i $x = \sqrt{R^2 - y^2}$, gdje je $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ apscisa kružnice k', koja omeđuje područje integracije σ. Sumirajući slojeve, idemo uzduž osi Y i to, kako se vidi iz slike, od $y = 0$ do $y = R$. To su granice prvog integrala. Imamo dakle:

$$\frac{V}{8} = \int_0^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx \qquad \text{(a)}$$

Budući da računanje drugog integrala traži više vremena i mjesta, riješimo ga posebno kao neodređeni integral.

$$I = \int \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx$$

Uzevši u obzir da je y konstantan, stavimo

$$R^2 - y^2 = k^2$$

$$\text{odnosno} \qquad k = \sqrt{R^2 - y^2} \qquad \text{(b)}$$

pa dobijemo:

$$I = \int \sqrt{k^2 - x^2}\, dx$$

To je poznati nam predtip C (vidi Dio II. str. 85, zadatak 2.)

Dobijemo:

$$I = \frac{k^2}{2} \arcsin \frac{x}{k} + \frac{x}{2} \sqrt{k^2 - x^2}$$

ili uzevši u obzir (b)

$$I = \frac{R^2 - y^2}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - y^2 - x^2}$$

a uvrštenje u (a) daje

$$\frac{V}{8}=\int_0^R dy \left| \frac{R^2-y^2}{2} \arc \sin \frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}+\frac{x}{2}\sqrt{R^2-y^2-x^2}\right|_0^{\sqrt{R^2-y^2}}$$

Uvrštavamo granice integracije i to samo u x, jer je y konstanta.

Dobijemo:

$$\frac{V}{8}=\int_0^R dy\Big[\frac{R^2-y^2}{2} \arc \sin 1+\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{2}\underbrace{\sqrt{R^2-y^2-R^2+y^2}}_{0}\Big]$$

Uvrštenje donje granice daje 0, jer je $\arc \sin 0 = 0$. Uzevši u obzir, da je $\arc \sin 1 = \frac{\pi}{2}$, dobijemo:

$$\frac{V}{8}=\frac{\pi}{4}\int_0^R (R^2-y^2)\,dy$$

Odatle

$$\frac{V}{8}=\frac{\pi}{4}\left| R^2y-\frac{y^3}{3}\right|_0^R=\frac{\pi}{4}\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}R^3=\frac{\pi}{6}R^3$$

ili

$$V=\frac{4}{3}R^3\pi$$

Riješi isti zadatak još jednom po formuli (106a), t. j. uzevši sloj kugle u smjeru osi Y, i nariši pripadnu sliku. Integral će glasiti

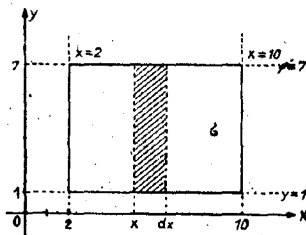
$$\frac{V}{8}=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\;dy$$

Iz navedenih primjera već vidimo, da za određivanje granica dvostrukih integrala, a to je gotovo jedina teškoća pri njihovom rješavanju, ne igra obično uloge oblik plohe $z=f(x, y)$, koja omeđuje zadano tijelo. Iz toga se razloga ta ploha obično ne crta, što praktički i nije uvijek moguće, već se crta samo područje integracije.

Navedimo nekoliko primjera:

1. Odredi obujam tijela, koje je omeđeno s

$$z = xy$$
$$x = 2 \quad ; \quad x = 10$$
$$y = 1 \quad ; \quad y = 7$$
$$z = 0$$



Sl. 98

To znači, da se traži obujam tijela, koje je gore omeđeno sedlastom plohom $z = xy$, dolje ravninom XY ($z = 0$), a sa strana ravninama $x = 2$ i $x = 10$, koje su paralelne s ravninom YZ, i ravninama $y = 1$ i $y = 7$, koje su paralelne s ravninom XZ. Crtamo samo područje integracije σ, koje je pravokutnik sa stranicama paralelnim s osima X i Y (sl. 98), i uzevši neki x po

volji rišemo projekciju sloja debljine dx. Iz slike se jasno vidi, da će pri računanju volumena sloja, t. j. pri integriranju po y, biti granice integracije 1 i 7, a pri sumiranju slojeva, t. j. integriranju po x, granice su 2 i 10.

Imamo dakle prema (106a):

$$V = \iint_{\sigma} xy\,dx\,dy = \int_2^{10} x\,dx \int_1^7 y\,dy$$

Kako je x konstanta, mogli smo ga staviti pri računanju drugog integrala ispred znaka tog integrala, jer u našem slučaju x nije vezan zbrajanjem ili oduzimanjem s y.

Računamo:

$$V = \int_2^{10} x\,dx \left| \frac{y^2}{2} \right|_1^7 = \frac{1}{2} \int_2^{10} x\,dx\,(49 - 1) = 24 \left| \frac{x^2}{2} \right|_2^{10} = 12\,(100 - 4) = 12\,.\,96 = 1152$$

$$\underline{V = 1152}$$

Jasno je, da bismo mogli istodobno računati oba integrala, jer u drugi integral ne ulazi y:

$$V = \left| \frac{x^2}{2} \right|_2^{10} \cdot \left| \frac{y^2}{2} \right|_1^7 = \frac{1}{4}\,(100 - 4)(49 - 1) = 12\,.\,96 = \underline{1152}$$

Kako je područje integracije σ pravokutnik sa stranicama paralelnim s osima X i Y, imali smo najjednostavniji slučaj dvostrukog integrala, jer u tom slučaju ima i drugi integral konstantne granice. Riješi isti primjer po formuli (106b) uz sliku područja integracije i projekcije sloja.

2. Izračunaj volumen tijela omeđena s

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 \\ x &= 2 \quad ; \quad x = 0 \\ y &= 2 \quad ; \quad y = 0 \\ & \qquad\qquad z = 0 \end{aligned}$$

Napisavši jednadžbu zadane plohe u obliku

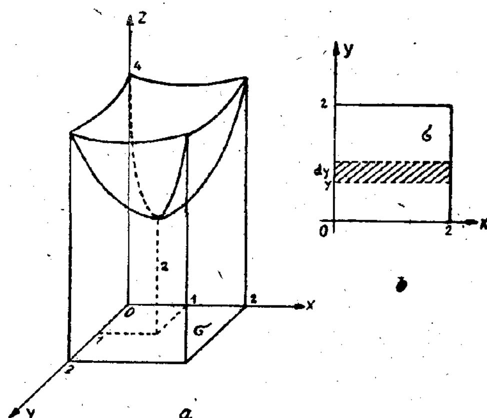
$$z - 2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

vidimo, da je to tijelo omeđeno odozgo plohom rotacionog paraboloida s vrhom u točki $V(1, 1, 2)$, (vidi Dio II. § 7, 7), ravninama $x = 2$ i $y = 2$, koje su paralelne s koordinatnim ravninama YZ, odnosno XY, i trima koordinatnim ravninama. Slika 99a prikazuje oblik tog tijela. Iz te slike vidimo, da je područje integracije kvadrat stranice 2.

Rišemo posebno to područje (sl. 99b), pa uzevši projekciju sloja tijela, na pr. u smjeru osi X, računamo prema (106b):

$$V = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^2 (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4)\,dx$$



Sl. 99

Vidimo, da opet imamo konačne granice integracije i u drugom integralu. Integriramo pamteći, da je pri računanju drugog integrala y = konstanta:

$$V = \int_0^2 dy \left| \frac{x^3}{3} + y^2 x - x^2 - 2yx + 4x \right|_0^2 =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 - 4 - 4y + 8 \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(2y^2 - 4y + \frac{20}{3} \right) dy =$$

$$= \left| \frac{2}{3} y^3 - 2y^2 + \frac{20}{3} y \right|_0^2 =$$

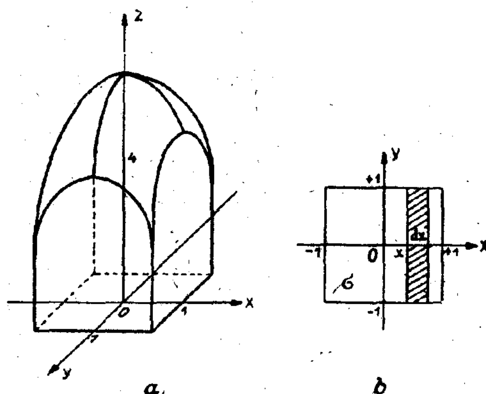
$$= \frac{16}{3} - 8 + \frac{40}{3} = 10 \frac{2}{3}$$

$$\underline{V = 10 \frac{2}{3}}$$

3. Izračunaj volumen tijela omeđena plohama

$$z = 4 - x^2 - y^2$$
$$x = +1 \quad ; \quad x = -1 \quad ; \quad y = +1 \quad ; \quad y = -1 \quad ; \quad z = 0$$

Zadano tijelo predočuje uspravan paralelopiped, kojemu je osnovka kvadrat stranice 2 u ravnini XY. Taj paralelopiped presječen je odozgo paraboloidom, nastalom rotacijom parabole $x^2 = 4 - z$ oko osi Z (sl. 100a).



Sl. 100

Narisavši područje integracije σ (sl. 100b) računamo na pr. prema (106a)

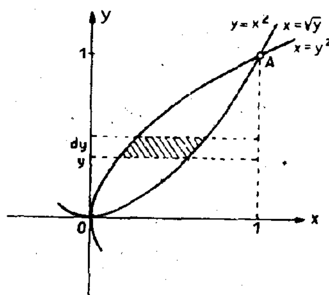
$$V = \iint_\sigma (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{+1} dx \int_{-}^{+1} (4 - x^2 - y^2)\, dy = \int_{-1}^{+1} dx \left| 4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right|_{-1}^{+1} =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left(4 - x^2 - \frac{1}{3} + 4 - x^2 + \frac{1}{3}\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left(\frac{22}{3} - 2x^2\right) dx = \left| \frac{22}{3} x - \frac{2}{3} x^3 \right|_{-1}^{+1} = \frac{40}{3}$$

$$\underline{V = 13\frac{1}{3}}$$



Sl. 101

4. Odredi obujam tijela omeđena s

$$z = 12 + y - x^2$$

$$x = y^2 \;\; ; \;\; y = x^2 \;\; ; \;\; z = 0$$

Riješivši zajedno jednadžbe $x = y^2$ i $y = x^2$ i odredivši na taj način sjecišta 0 (0,0) i $A(1,1)$, tih krivulja, narišimo područje integracije σ i projekciju sloja traženog volumena (sl. 101), pa računamo prema (106b):

$$V = \iint_\sigma (12 + y - x^2)\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (12 + y - x^2)\, dx =$$

$$= \int_0^1 dy \left| 12x + yx - \frac{x^3}{3} \right|_{y^2}^{\sqrt{y}} =$$

$$= \int_0^1 \left(12\sqrt{y} + y\sqrt{y} - \frac{1}{3}\sqrt{y^3} - 12y^2 - y^3 + \frac{1}{3}y^6\right) dy =$$

$$= \left| 8\sqrt{y^3} + \frac{2}{5}\sqrt{y^5} - \frac{2}{15}\sqrt{y^5} - 4y^3 - \frac{y^4}{4} + \frac{1}{21}y^7 \right|_0^1 = \frac{569}{140}$$

$$\underline{V = 4\,\frac{9}{140}}$$

Riješi isti primjer po formuli (106a).

U dosada navedenim primjerima bilo je sasvim svejedno, da li prvo integriramo po y, a zatim po x, ili prvo po x, a zatim po y, t. j. rabimo li formulu (106a) ili (106b). U primjeru, koji slijedi, moramo se svakako odlučiti za drugi redoslijed integriranja, jer prvi način vodi do težih integrala.

Primjer

Izračunaj volumen tijela, koje je omeđeno s

$$x + 2y - z = 0$$
$$y^2 = x + 4$$
$$x = 5$$

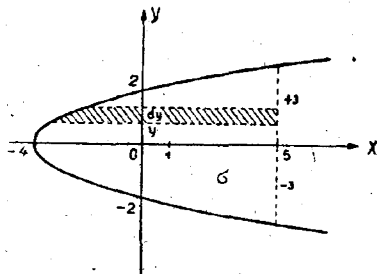
Zadano tijelo omeđeno je ravninom $x + 2y - z = 0$, koja prolazi ishodištem 0, valjkastom plohom okomitom na ravninu XY, koja siječe ravninu XY u paraboli $y^2 = x + 4$, i ravninom $x = 5$, koja je paralelna s ravninom YZ.

Rišemo naravno samo područje integracije σ.

Usporedivši jednadžbu zadane parabole s općom jednadžbom parabole, kojoj je os paralelna s osi X, a koordinate vrha su (m, n)

$$(y - n)^2 = 2p(x - m)$$

opažamo, da zadana parabola ima vrh u točki $(-4, 0)$, pa uzevši u obzir, da parabola ima za $x = 0$ $y = \pm 2$, a za $x = 5$ $y = \pm 3$, rišemo područje integracije σ (sl. 102).



Sl. 102

Da smo prvo integrirali po y, a zatim po x, t. j. da smo uzeli sloj traženog volumena u smjeru osi Y, imao bi drugi integral granice

$$y = -\sqrt{x + 4} \quad \text{i} \quad y = +\sqrt{x + 4}$$

pa bismo imali integrirati iracionalnu funkciju pri računanju prvog integrala. Stoga odabiremo drugi redoslijed integriranja i uzevši neki y = konstanta, rišemo projekciju sloja paralelnu s osi X (sl. 102).

Jednadžba zadane parabole u inverznom obliku glasi:

$$x = y^2 - 4$$

pa, kako se vidi iz slike, granice drugog integrala su

$$\text{od} \quad x = y^2 - 4 \quad \text{do} \quad x = 5$$

a te su racionalne.

Sumirajući slojeve idemo u smjeru osi Y i to od $y = -3$ do $y = +3$, kako se to vidi iz slike.

Imamo dakle prema (106b), uzevši u obzir da je $f(x, y) \equiv z = x + 2y$:

$$V = \iint_\sigma (x + 2y)\, dx\, dy = \int_{-3}^{+3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x + 2y)\, dx$$

Integrirajmo, pamteći da je pri računanju drugog integrala y = konstanta.

$$V = \int_{-3}^{+3} dy \left| \frac{x^2}{2} + 2y \cdot x \right|_{y^2-4}^{5} = \int_{-3}^{+3} dy \left\{ \frac{1}{2} \cdot 25 + 2y \cdot 5 - \left[\frac{1}{2}(y^2 - 4)^2 + \right.\right.$$

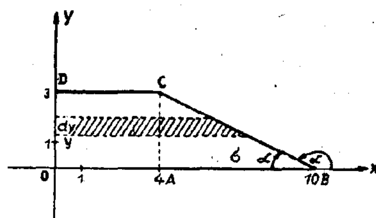
$$\left.\left. + 2y\,(y^2 - 4) \right] \right\} = \int_{-3}^{+3} \left(\frac{25}{2} + 10y - \frac{1}{2} y^4 + 4y^2 - 8 - 2y^3 + 8y \right) dy =$$

$$= \int_{-3}^{+3} \left(-\frac{1}{2} y^4 - 2y^3 + 4y^2 + 18y + \frac{9}{2} \right) dy = \left| -\frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{2} + \frac{4}{3} y^3 + 9y^2 + \frac{9}{2} y \right|_{-3}^{+3} =$$

$$= -\frac{243}{10} - \frac{81}{2} + 36 + 81 + \frac{27}{2} - \frac{243}{10} + \frac{81}{2} + 36 - 81 + \frac{27}{2} = 50{,}4$$

$$\underline{V = 50{,}4}$$

Pokažimo sada na primjeru, koji slijedi, da pri izboru redoslijeda integriranja moramo uzeti u obzir i oblik konture k' područja integracije.



Sl. 103

Primjer

Izračunaj $\iint_\sigma \left(3 - \frac{x}{4} - \frac{3}{4} y\right) dx\, dy$

ako je područje integracije σ zadano slikom 103.

Uzmemo li sloj traženog volumena u smjeru osi Y, t. j. primijenimo li formulu (106a), imat ćemo računati dva dvostruka integrala: po pravokutniku $OACD$ i po trokutu ABC. Da svedemo zadatak na računanje jednog dvostrukog integrala, uzet ćemo sloj u smjeru osi X, t. j. radit ćemo po formuli (106b).

Najprije napišimo jednadžbu pravca BC, kao pravca koji prolazi točkom $B(10, 0)$, a ima gradijent $a = tg\,\alpha = tg\,(180 - \alpha') = -tg\,\alpha' = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ (vidi sl. 103).

Prema $y - y_1 = a(x - x_1)$ imamo

$$y = -\frac{1}{2}(x - 10)$$

ili

$$y = -\frac{x}{2} + 5$$

ili

$$x = -2y + 10$$

jednadžbe pravca BC

Očito je, da jednadžbu pravca BC možemo također napisati kao jednadžbu pravca kroz dvije točke $B(10, 0)$ i $C(4, 3)$.

Računajući volumen sloja integrirat ćemo po x idući od osi Y ($x = 0$) do pravca $BC(x = -2y + 10)$, a sumirajući slojeve, t. j. integrirajući po y, ići ćemo od $y = 0$ do $y = 3$, kako se to jasno vidi iz slike 103.

Računamo:

$$\iint_\sigma \left(3 - \frac{x}{4} - \frac{3}{4}y\right)dx\,dy = \int_0^3 dy \int_0^{-2y+10} \left(3 - \frac{x}{4} - \frac{3}{4}y\right)dx =$$

$$= \int_0^3 dy \left| \left(3 - \frac{3}{4}y\right)x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right|_0^{-2y+10} = \int_0^3 dy\left[3\left(1 - \frac{y}{4}\right)\left(-2y + 10\right) - \frac{1}{8}\left(-2y + 10\right)^2\right] =$$

$$= \int_0^3 \left[6\left(1 - \frac{y}{4}\right)\left(-y + 5\right) - \frac{1}{2}\left(-y + 5\right)^2\right]dy = \frac{1}{2}\int_0^3 \left\{\left(-y + 5\right)\left[3\left(4 - y\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(-y + 5\right)\right]\right\}dy = \frac{1}{2}\int_0^3 \left[\left(-y + 5\right)\left(12 - 3y + y - 5\right)\right]dy = \frac{1}{2}\int_0^3 \left[\left(-y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 5\right)\left(7 - 2y\right)\right]dy = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(2y^2 - 17y + 35\right)dy = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{3}y^3 - \frac{17}{2}y^2 + 35y\right|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(18 - \frac{153}{2} + 105\right) = \frac{1}{4}(36 - 153 + 210) = \frac{93}{4} = 23\frac{1}{4}$$

Za vježbu i da uočiš razliku u množini računskog rada, riješi taj dvostruki integral nanovo po formuli (106a). Vidi također primjer 1. naveden dalje u točki 5.a) ovog paragrafa.

Izračunaj volumen i nariši slike zadanih tjelesa, a posebno i područja integracije, ako su tjelesa omeđena s

1. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{1} = 1$; $x = 1$; $x = -1$; $y = 2$; $y = -2$; ; $z = 0$.

[$V = 8$ = volumen uspravne četverostrane prizme, kojoj je osnovka pravokutnik, presječene zadanom ravninom].

2. $z = 5$

$x = 2$; $x = 10$; $y = 1$; $y = 7$; $z = 0$ [$V = 240$]

3. $z = x^2 + y^2$
$y = x \quad ; \quad x = 6 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0$ $[V = 432]$

4. $x + y + z - 3 = 0$
$y^2 = 4 - 2x \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad z = 0$ $\left[V = 7\frac{7}{15}\right]$

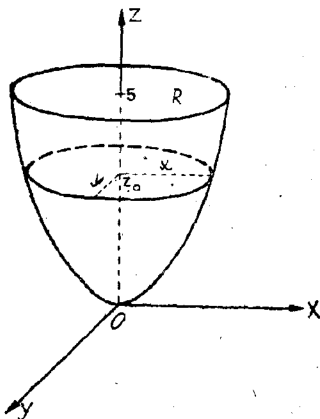
Primjedba

Računanje volumena zadanog tijela vršit ćemo pomoću dvostrukog integrala samo u tom slučaju, ako se taj volumen ne da izračunati jednostrukim integralom, jer je mnogo jednostavnije izračunati jednostruki nego dvostruki integral. Tako ćemo obujam rotacionog tijela računati uvijek prema poznatoj nam formuli (91) iz II. dijela Repetitorija:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Isto tako ćemo računati pomoću jednostrukog integrala volumen tijela, čiju površinu S poprečnog presjeka možemo prikazati kao funkciju od x, odnosno y i to prema formuli (89) iz II. dijela Repetitorija:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



Sl. 104

U tom dijelu na str. 208 izračunat je na taj način obujam troosnog elipsoida. Izračunaj ga sada pomoću dvostrukog integrala, da uočiš golemu razliku u množini računskog rada u jednom i drugom slučaju.

Navedimo još jedan sličan primjer.

Primjer

Odredi volumen eliptičkog paraboloida

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 2z$$

između ravnina $z = 0$ i $z = 5$.

Slika 104 prikazuje tijelo, čiji volumen tražimo.

Jasno je, da i taj volumen možemo izračunati pomoću dvostrukog integrala, na pr. oduzevši od obujma eliptičkog valjka s osnovkom B i visinom 5 volumen tijela, koje je omeđeno tim valjkom i zadanim eliptičkim paraboloidom, ili, jednostavnije, prenijevši ravninu XY paralelnim pomakom uzduž osi Z za 5 prema gore.

Mnogo jednostavnije riješit ćemo taj zadatak po formuli (89). U tu svrhu presijeći ćemo eliptički paraboloid nekom ravninom $z = z_0$ paralelnom s ravninom XY.

Uvrštenje $z = z_0$ u jednadžbu paraboloida daje

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 2z_0 \,\Big|\, :2z_0$$

$$\frac{x^2}{18z_0} + \frac{y^2}{2z_0} = 1$$

traženi presjek ili točnije njegovu sukladnu projekciju na ravninu XY.

Kako vidimo, presjek je elipsa s poluosima $a = \sqrt{18 z_0}$ i $b = \sqrt{2 z_0}$, pa prema poznatoj formuli za površinu elipse $S = ab\,\pi$ imamo:

$$S = \sqrt{18 z_0} \cdot \sqrt{2 z_0} \cdot \pi$$

ili uredivši i uzevši $z_0 = z$ dobijemo

$$S(z) = 6\,\pi\,z$$

Primjena formule (89) daje neposredno traženi volumen:

$$V = 6\pi \int_0^5 z\,dz = 6\pi \left| \frac{z^2}{2} \right|_0^5 = 3\,\pi \cdot 25 = 75\,\pi$$

$$\underline{V = 75\,\pi}$$

Ako je područje integracije σ krug ili elipsa, vrši se radi jednostavnijeg integriranja prijelaz na nove promjenljive [vidi dalje točku 3. ovog paragrafa].

b) Srednja vrijednost dvostrukog integrala

Govoreći o srednjoj vrijednosti jednostrukog određenog integrala (vidi Dio II. § 6, 2), rekli smo, da se određivanje te srednje vrijednosti svodi na pretvaranje površine S omeđene krivuljom $f(x)$, t. j. $S = \int_a^b f(x)dx$, u pravokutnik, kojemu je visina y_0 ta srednja vrijednost integrala, a osnovka duljina intervala integracije $(b - a)$, t. j.

$$y_0 = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$$

Posve slično definiramo srednju vrijednost dvostrukog integrala. Ulogu površine S igra sada volumen $V = \int\int_\sigma f(x, y)dxdy$, a ulogu y_0 igra $z_0 = f(\varsigma,\eta)$, t. j. aplikata zadane plohe $z = f(x, y)$ u nekoj »srednjoj« točki (ς,η) područja σ. Drugim riječima, pretvaramo zadano tijelo volumena $V = \int\int_\sigma f(x, y)dx\,dy$ u valjak istog volumena V, kojemu je baza područje integracije σ, a visina srednja vrijednost dvostrukog integrala $z_0 = f(\varsigma, \eta)$:

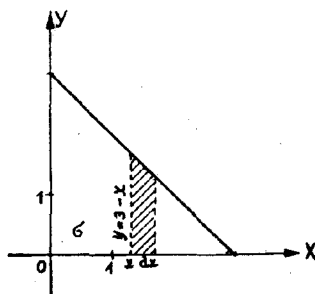
$$V = \int\int_\sigma f(x, y)dx\,dy = \sigma \cdot z_0 = \sigma \cdot f(\varsigma, \eta)$$

Odatle

$$z_0 = f(\varsigma, \eta) = \frac{\int\int_\sigma f(x, y)dx\,dy}{\sigma} \qquad (107)$$

Srednja vrijednost dvostrukog integrala je omjer vrijednosti tog integrala i površine područja integracije.

Ta srednja vrijednost određenog integrala uzima se kao **srednja vrijednost podintegralne funkcije** $f(x, y)$ **u području** σ.



Sl. 105

Primjer 1

Odredi srednju vrijednost funkcije $z = 2x + y$ u trokutu omeđenom koordinatnim osima i pravcem $x + y = 3$.

Napisavši područje integracije σ (sl. 105) i uzevši u obzir da je $\sigma = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$, računamo prema (107) i (106a):

$$z_0 = \frac{\iint\limits_{\sigma} (2x + y) dx\, dy}{\frac{9}{2}} =$$

$$= \frac{2}{9} \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2x + y)\, dy =$$

$$= \frac{2}{9} \int_0^3 dx \left| 2xy + \frac{y^2}{2} \right|_0^{3-x} = \frac{2}{9} \int_0^3 dx \left[2x(3 - x) + \frac{1}{2}(3 - x)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^3 [(3 - x)(4x + 3 - x)]\, dx = \frac{1}{3} \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left| -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right|_0^3 = 3$$

$$\underline{z_0 = 3}$$

Vidi dalje točku 3. ovog §-a.

2. Trostruki integrali

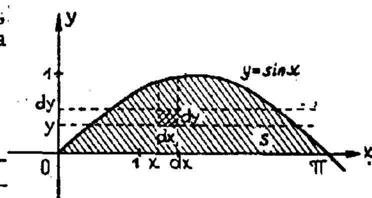
Pokažimo, da površinu ravna lika možemo također izračunati pomoću dvostrukog integrala.

Odredimo na taj način na pr. površinu S lika, koji je omeđen prvim lukom sinusoide i osi X (sl. 106).

Uzmemo za x i y vrijednosti po volji, kojim dademo priraste dx i dy. Tada je prema slici:

površina elementa lika $dS = dx \cdot dy$.

Da dobijemo površinu S čitava lika, moramo integrirati u smjer osi X i osi Y, t. j. izračunati dvostruki integral



Sl. 106

$$S = \iint_S dx\, dy$$

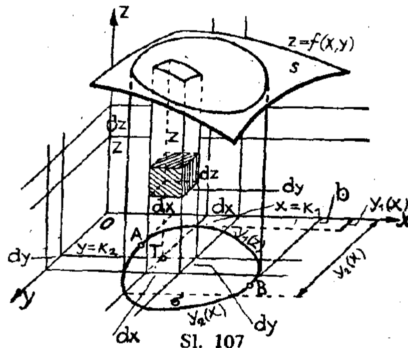
pri čemu je područje integracije σ tražena površina S lika. Prostorno možemo naš problem shvatiti tako, da računamo volumen cilindričkog tijela, kojemu je osnovka površina S zadanog ravnog lika, a visina 1, t. j. $V = S = \iint_S 1 \cdot dx\, dy$.

Dalje postupamo prema formuli (106a) ili (106b):

$$S = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} dx \left| y \right|_0^{\sin x} = \int_0^{\pi} \sin x\, dx.$$

Dobili smo obični jednostruki integral·

$$S = \left| -\cos x \right|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = \underline{2}$$



Sl. 107

Slično tome možemo volumen ispod zadane plohe $z = f(x, y)$ izračunati i pomoću **trostrukog integrala**.

Uzevši x, y i z po volji, davši im priraste dx, dy i dz i povukavši ravnine paralelne s koordinatnim ravninama, dobijemo volumen dV elementa tijela, pri čemu je, kako se to jasno vidi iz slike 107,

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \qquad (108)$$

Da dobijemo volumen čitava tijela, moramo integrirati u smjeru osiju X, Y i Z, t. j. trostruko integrirati, pa je

$$V = \iiint_V dx\, dy\, dz$$

pri čemu integriramo po volumenu V tijela, čiji obujam tražimo. Područje integracije je dakle trodimenzionalno.

Dalje postupamo na slični način, kao pri računanju dvostrukog integrala, t. j. rastavimo trostruki integral u tri jednostruka:

$$V = \int dx \int dy \int dz$$

i prelazimo na određivanje granica integriranja. Pri računanju trećeg integrala smatramo da je $x = k_1$ = konstanta i $y = k_2$ = konstanta, pa taj integral predočuje volumen stupića tijela s osnovkom $dx \cdot dy$ (vidi sl. 107). Jasno je, da su granice integracije $z = 0$ i $z = f(x, y)$. Da dobijemo volumen sloja debljine dx zadanog tijela, moramo sumirati te stupiće. U tu svrhu računamo drugi integral, čije su granice $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$, kako se to jasno vidi iz slike. Konačno prelazimo na sumiranje slojeva tijela računajući prvi integral od $x = a$ do $x = b$.

Tako dobijemo volumen V čitava tijela:

$$V = \iiint_V dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_0^{f(x,y)} dz \tag{109}$$

pri čemu možemo mijenjati redoslijed integriranja kao i pri računanju dvostrukih integrala.

Jasno je, da nema smisla računati volumen tijela pomoću trostrukog integrala, jer nakon izračunavanja trećeg integrala po formuli (109) automatski dobijemo dvostruki integral.

Napisavši formulu (109) u obliku

$$V = \iiint_V 1 \cdot dx\, dy\, dz$$

vidimo, da pri računanju volumena tijela trostrukim integralom zapravo integriramo po volumenu V zadanog tijela funkciju 1. Međutim, trostruki integrali imaju veliko praktičko značenje, ako podintegralna funkcija nije 1, već funkcija triju nezavisnih promjenljivih $u = f(x, y, z)$, pa je moramo integrirati po trodimenzionalnom području w volumena V, u kojem je ta funkcija definirana [vidi dalje točku 5.) ovog paragrafa]. Prema tome trostruki integral funkcije $u = f(x, y, z)$ uzet u konačnom trodimenzionalnom području w volumena V ima općenito oblik:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \tag{109a}$$

Tu je $z = z(x, y)$ jednadžba plohe S, koja omeđuje zadano prostorno područje integracije w volumena V, pri čemu pretpostavljamo, da kojigod pravac, koji je paralelan s bilo kojom koordinatnom osi, presjeca tu plohu S samo u dvije točke.

Iz navedenog slijedi način računanja trostrukog integrala po prostornom području w volumena V.

Najprije se funkcija $f(x,y,z)$ integrira po jednoj promjenljivoj, na pr. z, u granicama njene promjene uz konstantne, ali po volji odabrane vrijednosti dviju drugih promjenljivih (x i y), zatim se rezultat prvog integriranja integrira po rav-

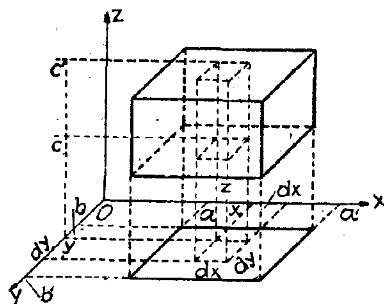
nom području, koje je projekcija na koordinatnu ravninu funkcije tih dviju promjenljivih, i to po drugoj promjenljivoj (y) u granicama njene promjene uz konstantnu, ali po volji uzetu vrijednost treće promjenljive (x), konačno se rezultat tog integriranja integrira po toj trećoj promjenljivoj (x) u granicama njene najveće promjene u navedenom ravnom području (projekciji).

U posebnom slučaju, kad je područje integracije w pravokutan paralelopiped, kojemu su bridovi paralelni s koordinatnim ravninama, tada su granice svih triju integrala konstantne i ne mijenjaju se pri promjeni redoslijeda integriranja.

Na pr. prema slici 108 imamo:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

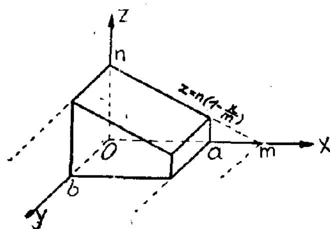
$$= \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} dy \int_c^{c'} f(x,y,z)\,dz$$



Sl. 108

Promatrajući određene integrale u njihovoj cjelokupnosti, opažamo potpunu analogiju u konstrukciji jednostrukih, dvostrukih i trostrukih integrala. Pri integriranju funkcije jedne promjenljive svi elementi, koje sumiramo, leže uzduž jednog pravca (osi X), pa integrirajući po tom pravcu dobijemo obični jednostruki integral, koji se iz toga razloga zove također pravocrtni. Pri integriranju funkcije dviju promjenljivih, koja je definirana u nekom dijelu koordinatne ravnine, na pr. ravnine XY, elementi, koje sumiramo, raspoloženi su uzduž tog dvodimenzionalnog područja σ ravnine XY, pa integrirajući po tom području dolazimo do dvostrukih integrala, koji se iz toga razloga zovu također ravninski. Konačno, funkcija triju promjenljivih definirana je u trodimenzionalnom području w pa se elementi, koje sumiramo, nalaze u tom prostornom području w volumena V, pa integrirajući po tom volumenu dobijemo trostruki integral, koji se iz toga razloga zove također prostorni integral.

Jasno je, da funkcije četirju promjenljivih $v = f(x, y, z, u)$, koje su definirane u četverodimenzionalnom području, traže primjenu četverostrukih integrala, koji nisu rijetki na pr. u teoretskoj fizici, i t. d. Zasada navedimo samo primjere za računanje obujma zadanog tijela trostrukim integralom. Kasnije u točki 5.) ovog §-a osvrnut ćemo se potanko na opću primjenu tih integrala.



Sl. 109

Primjer

Izračunaj obujam tijela omeđena s

$$\frac{x}{m} + \frac{z}{n} = 1$$

$$x = a \;;\; y = b \;;\; x = 0 \;;\; y = 0 \;;\; z = 0.$$

Prema slici 109 i formuli (109):

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^{n\left(1-\frac{x}{m}\right)} dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \left| z \right|_0^{n\left(1-\frac{x}{m}\right)} =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot n\left(1 - \frac{x}{m}\right) = n \int_0^a \left(1 - \frac{x}{m}\right) dx \int_0^b dy =$$

$$= n \int_0^a \left(1 - \frac{x}{m}\right) dx \left| y \right|_0^b = bn \left| x - \frac{x^2}{2m} \right|_0^a = \frac{bn}{2m}\left(2am - a^2\right)$$

$$V = \frac{abn}{2m}(2m - a)$$

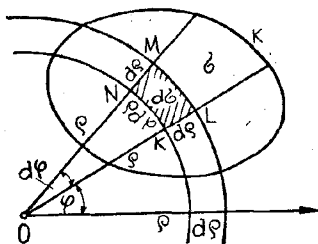
Riješi pomoću trostrukih integrala primjere navedene pod I. a) ovog §.)

Dalnje primjene trostrukih integrala vidi u točki 5. ovog §-a.

3. Zamjena promjenljivih u dvostrukim integralima

Rekli smo već, da su radi pojednostavljenja integriranja, a u prvom redu, da se izbjegne integriranje iracionalnih funkcija, vrši zamjena promjenljivih pri računanju višestrukih integrala. Najčešće prelazimo pri računanju dvostrukih integrala na polarne koordinate φ i ρ i na eliptičke koordinate.

Iz toga razloga promotrimo detaljnije ta dva slučaja, a opći slučaj zamjene promjenljivih obrazložimo ukratko.



Sl. 110

a) Polarne koordinate

Neka se traži

$$\iint_\sigma f(x, y) dx\, dy$$

gdje je $f(x, y)$ neprekinuta funkcija u području integracije σ. Zamijenimo pravokutne koordinate x i y polarnima φ i ρ:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

pa je $$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = F(\varphi, \rho)$$

Područje integracije σ, za koje pretpostavimo, da radijvektori sijeku konturu k' toga područja najviše u dvije točke, rastavimo u elemente narisavši koordinatne linije, t. j. koncentrične kružnice ρ = konstanta i poluzrake iz pola φ = konstanta.

Uzmemo li tako po volji neki φ i neki ρ pa im dademo priraste $d\varphi$ i $d\rho$, za koje smatramo da su beskonačno mali, dobit ćemo element $KLMN$ područja σ, koji možemo uzeti da je pravokutnik s osnovkom $\widehat{KN} = \rho \cdot d\varphi$ i visinom $KL = NM = d\rho$ (sl. 110).

Prema tome je

$$d\sigma = dx\, dy = \rho d\varphi \cdot d\rho \tag{110}$$

površina elementa područja.

Budući da u drugu ruku dvostruki integral, koji promatramo, glasi

$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)dx\, dy$, dobijemo uzevši u obzir formule prijelaza (a) i formulu (110):

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\sigma} f(x, y)dx\, dy &= \iint\limits_{\sigma} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \\ &= \iint\limits_{\sigma} F(\varphi, \rho)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\end{aligned} \tag{111}$$

Pomoću te formule vršimo transformaciju dvostrukog integrala od pravokutnih koordinata na polarne. Istom formulom se služimo, ako je podintegralna funkcija zadana u polarnim koordinatama $F(\varphi, \rho)$. Iz te formule vidimo, da se ta transformacija vrši tako, da se u integrandu zamijene x i y sa $\rho\cos\varphi$ i $\rho\sin\varphi$, a mjesto $dx\, dy$ uzme $\rho d\rho\, d\varphi$.

Računanje dvostrukih integrala u polarnim koordinatama vrši se na slični način kao i računanje tih integrala u pravokutnim koordinatama: dvostruki integral se rastavlja u dva jednostruka, pri čemu mogu biti dva slučaja:

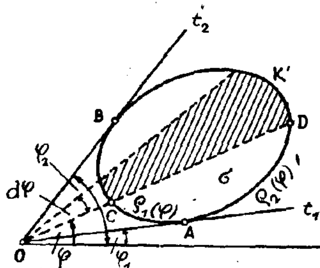
1) Pol O leži izvan područja integracije σ.

Rastavivši dvostruki integral u dva jednostruka

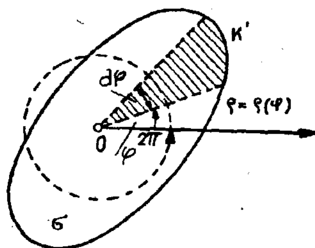
$$\int d\varphi \int f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \tag{a}$$

računamo najprije sloj traženog volumena, uzevši u tu svrhu neki konstantni $\varphi = k$ po volji i davši mu prirast $d\varphi$ (slika 111).

Dirališta A i B tangenata povučenih iz pola O na konturu k' područja dijeli tu krivulju u dva dijela: donji jednadžbe $\rho_1(\varphi)$ i gornji jednadžbe $\rho_2(\varphi)$, pa računa-



Sl. 111



Sl. 112

jući volumen sloja zadanog tijela idemo po radijvektoru ρ od točke C do točke D, pa su granice drugog integrala u (a): donja $\rho_1(\varphi)$, a gornja $\rho_2(\varphi)$. Iza toga sumiramo slojeve integrirajući po φ i to od $\varphi = \varphi_1$ do $\varphi = \varphi_2$, kako se to jasno vidi iz slike 111.

Imamo dakle:

$$V = \iint_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\sigma} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)\, \rho d\rho \qquad (111a)$$

Jasno je, da možemo i u ovom slučaju promijeniti redoslijed integriranja.

2) Pol O leži unutar područja integracije.

Iz slike 112 jasno se vidi, da integrirajući najprije po ρ, a zatim po φ dobijemo:

$$V = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)\, \rho d\rho \qquad (111b)$$

gdje je $\rho = \rho(\varphi)$ jednadžba konture k' u polarnim koordinatama.

U posebnom slučaju, kad je područje integracije σ krug polumjera R sa središtem u polu, imamo

$$V = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{R} f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)\rho d\rho \qquad (111c)$$

Ako područje integracije σ ne odgovara uvjetu, da radijvektori povučeni iz pola sijeku konturu k' područja σ najviše u dvije točke, treba područje σ rastaviti u dijelove tako, da se taj uvjet zadovolji.

Spomenimo još, da za $f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi) = 1$ dobijemo površinu S područja integracije σ, jer u tom slučaju formula (111b) prima oblik

$$\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} 1 \cdot \rho d\rho = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \left| \frac{\rho^2}{2} \right|_{0}^{\rho(\varphi)} = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi = S$$

ili uzevši da su granice integracije φ_1 i φ_2, dobit ćemo poznatu nam formulu za površinu sektora krivulje $\rho = \rho(\varphi)$ zadane u polarnim koordinatama:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

[vidi Dio II. formulu (78a)].

Prema tome i površinu omeđenu ravnom krivuljom, čija je jednadžba zadana u polarnim koordinatama, možemo računati pomoću dvostrukog integrala.

b) Opći slučaj

Uzmimo sada opći slučaj, kad treba u dvostrukom integralu

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx\, dy$$

zamijeniti promjenljive x i y s u i v, pri čemu su te promjenljive vezane međusobno funkcijama:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Za te funkcije pretpostavljamo, da su neprekinute i da imaju neprekinute parcijalne derivacije.

u i v ne ćemo više promatrati kao polarne koordinate u ravnini XY, već kao pravokutne koordinate u drugoj ravnini UV pretpostavljajući, da je $u \geqq 0$, a $0 \leqq v < 2\pi$.

Zadatak se svodi na to, da se izvrši preslikavanje područja σ ravnine XY u područje σ' ravnine UV uz pretpostavku, da su jednadžbe (a) takve, da svakom paru vrijednosti x i y odgovara jedan određeni par vrijednosti u i v, ili drugim riječima, da svakom položaju točke T u području σ odgovara određen položaj točke T' u području σ' i obratno. Ukratko se kaže: relacije (a) moraju imati to svojstvo, da uzajamno jednoznačno preslikavaju područje σ u područje σ' (i obratno).

Uz tu pretpostavku zamjenom promjenljivih x i y s u i v prelazi područje σ dvostrukog integrala u ravnini XY u područje σ' u ravnini UV. Da posve shvatimo to preslikavanje područja σ u područje σ', promotrimo već poznatu nam zamjenu promjenljive x u običnom određenom integralu promjenljivom t pri prijelazu na parametarsku jednadžbu podintegralne funkcije.

Znamo: ako je $\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right|$ parametarska jednadžba podintegralne

funkcije $y = f(x)$, tada izračunavši $dx = x'(t)dt$, dobijemo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[y(t)] \cdot x'(t)dt \qquad \text{(b)}$$

gdje je $a = x(t_1)$, a $b = y(t_2)$.

Na pr. računajući površinu polukruga pisali smo uzevši u obzir da parametarska jednadžba kružnice $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ glasi $\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned}$ i da je $dx = - r \sin t \cdot dt$:

$$\frac{S}{2} = \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} \cdot (-r \sin t)\, dt =$$

$$= + r^2 \int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin t \, dt = r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt$$

gdje je $\qquad -r = r \cos \pi, \quad \text{a} \quad +r = r \cos 0$

[vidi Dio II. § 7, 1. a) i d)].

S našeg sadašnjeg gledišta zamjene promjenljivih u određenom integralu, možemo jednadžbu $x = x(t)$ smatrati kao formulu preslikavanja intervala integracije $[a, b]$ na osi X (u našem primjeru intervala $[-r, +r]$) na neki drugi interval $[t_1, t_2]$ osi T (u našem primjeru na interval $[\pi, 0]$).

Iz jednakosti (b) slijedi:

$$dx = x'(t)dt$$

ili

$$\frac{dx}{dt} = x'(t)$$

ili

$$dx : dt = x'(t) : 1$$

Iz te jednakosti vidimo, da $x'(t)$, ako je $x'(t) > 0$, predočuje omjer elementa (diferencijala) intervala $[a, b]$ na osi X i pripadnog elementa (diferencijala) dt na osi T. To znači:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

predočuje omjer (mjerilo) preslikavanja dužine $[a, b]$ na osi X u dužinu $[t_1, t_2]$ na osi T ili, kako se kaže,

$\frac{dx}{dt}$ je koeficijent deformacije dužine pri tom preslikavanju.

Uvjet $x'(t) > 0$ osigurava uzajamnu jednoznačnost u preslikavanju dužina, pri čemu u pojedinim točkama $x'(t)$ može biti jednak nuli. Slučaj $x'(t) < 0$ svodimo na predašnji promijenivši smisao intervala $[t_1, t_2]$, što smo i napravili u našem primjeru zamijenivši interval integracije $[\pi, 0]$ intervalom $[0, \pi]$.

Sasvim analogno rješava se problem zamjene promjenljivih x i y u dvostrukom integralu promjenljivima u i v uz zadanu vezu

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

gore navedenih svojstava. Načelna je razlika samo u tome, da sada preslikavamo dijelove ravnina, a ne pravaca.

Može se pokazati, da pri preslikavanju područja σ ravnine XY u područje σ' ravnine UV koeficijent deformacije glasi slično

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'}$$

gdje je $d\sigma$ element područja σ ravnine XY, a $d\sigma'$ element pripadnog područja σ' ravnine UV.

Koeficijent deformacije $\frac{d\sigma}{d\sigma'}$ predočuje omjer ili modul preslikavanja područja σ u području σ'. On pokazuje, koliko se puta povećala ili umanjila površina elementa $d\sigma$ u okolišu točke $T(x, y)$ područja σ nakon njena preslikavanja u okoliš pripadne točke $T'(u, v)$ područja σ'.

Prema tome sasvim analogno jednadžbi (b) dobijemo:

$$\iint_{\sigma} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\sigma'} f[x(u, v), y(u, v)] \frac{d\sigma}{d\sigma'}\,du\,dv \qquad \text{(c)}$$

Koeficijent deformacije $\frac{d\sigma}{d\sigma'}$ računa se pomoću tako zvane Jacobijeve funkcijske determinante za funkcije (a) $\begin{matrix} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{matrix}$ i jednak je njenoj apsolutnoj vrijednosti:

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right|$$

Ta determinanta označuje se simbolom

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

pa je

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \text{apsolutnoj vrijednosti} \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right|$$

ili **(112)**

$$dx\,dy = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right| du\,dv$$

Imamo konačno prema (c):

$$\iint_{\sigma} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\sigma'} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv \qquad \text{(112a)}$$

gdje je $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right|$

Iz navedenog slijedi, da formula (112a) vrijedi uz uvjete, da su funkcije $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$, koje vrše preslikavanje područja σ u područje σ', neprekinute, da imaju neprekinute parcijalne derivacije i da imaju Jacobijevu determinantu, koja ne mijenja svoga predznaka u području σ, ali može da se poništi u pojedinim točkama. Ti uvjeti osiguravaju neprekinutost i uzajamnu jednoznačnost preslikavanja.

Primijenimo tu formulu za zamjenu u dvostrukom integralu pravokutnih koordinata x i y polarnima φ i ρ.

Uzevši u obzir, da je u našem slučaju $u = \varphi$ a $v = \rho$ i da je

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

dobijemo prema (112):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \rho)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -\rho \sin^2 \varphi - \rho \cos^2 \varphi = -\rho(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = -\rho$$

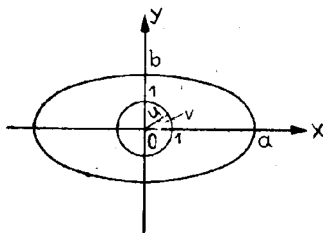
pa je

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \rho)} \right| = \rho$$

Imamo dakle prema (112a):

$$\iint_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\sigma'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi$$

Dobili smo našu formulu (111), ali tu formulu ne smijemo u tom slučaju promatrati kao formulu prijelaza od pravokutnih koordinata na polarne, već kao rezultat posebnih transformacija u dvostrukom integralu od pravokutnih koordinata opet na pravokutne, ali u drugom pripadnom području σ'.



Sl. 113

c) Eliptičke koordinate

Ako je područje integracije σ elipsa ili dio elipse, vršimo radi jednostavnijeg integriranja prijelaz na eliptičke koordinate u i v.

Iz slike 113 vidimo, da je u promjenljiv polumjer kružnice, a mijenja se od $u = 0$ do $u = 1$, dok je v pripadni središnji kut, koji se mijenja od 0 do 2π. Veza između eliptičkih koordinata u i v i pravokutnih x i y glasi:

$$x = au \cos v$$
$$y = bu \sin v \qquad (113)$$

$$0 \leq u \leq 1; \qquad 0 \leq v < 2\pi$$

Na pr. za $u = 1$ i $v = 0$ dobijemo $x = a$; $y = 0$, a to je desni vrh elipse, za $u = 1$ i $v = 90°$, dobijemo gornji vrh $(0, b)$ i t. d.

Računamo prema (112):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos v & -au \sin v \\ b \sin v & bu \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= ab\, u \cos^2 v + ab\, u \sin^2 v = abu$$

pa je prema (112)

$$dx\, dy = ab\, u\, du\, dv \qquad (113a)$$

i

$$\iint_\sigma f(x, y) dx\, dy = ab \iint_{\sigma'} f(au \cos v,\ bu \sin v) u\, du\, dv =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 f(au \cos v,\ bu \sin v)\, u\, du \qquad (113b)$$

ako je područje integracije σ potpuna elipsa, inače se mijenjaju granice prvog integrala.

Opažamo, da imamo konstantne granice integracije.

Kako smo već rekli, pri računanju dvostrukih integrala vršit ćemo uvijek radi jednostavnijeg integriranja prijelaz na polarne, odnosno eliptičke koordinate, ako je područje integracije krug, odnosno elipsa ili dijelovi tih likova.

Navedimo nekoliko primjera.

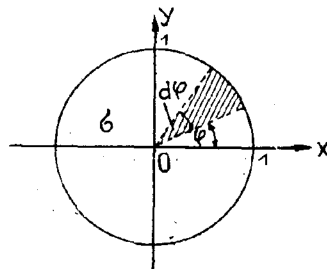
Primjeri

1. Odredi obujam tijela omeđena s

$$x + y + z - 3 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad z = 0.$$

Traži se obujam kružnog valjka, kojemu je os simetrije os Z, a polumjer osnovke 1. Taj valjak presječen je ravninom $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ (nariši sliku!).

Prema slici 114, koja predočuje područje integracije σ i projekciju sloja traženog volumena, računamo obzirom na formulu (111c):



Sl. 114

$$V = \iint_{\sigma} (3 - x - y)dx\,dy =$$

$$= \iint_{\sigma'} (3 - \rho \cos\varphi - \rho \sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3 - \rho \cos\varphi - \rho \sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

Vidimo, da imamo konstantne granice integracije!

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{3}{2}\rho^2 - \frac{\cos\varphi}{3}\rho^3 - \frac{\sin\varphi}{3}\rho^3 \right|_0^1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{\cos\varphi}{3} - \frac{\sin\varphi}{3} \right) d\varphi = \left| \frac{3}{2}\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{3}\cos\varphi \right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 3\pi$$

$$\underline{V = 3\pi}$$

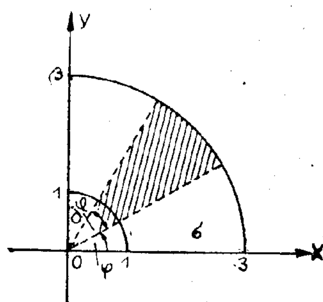
2. Odredi volumen tijela omeđena s

$$z = xy$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 9 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad y = 0; \qquad z = 0.$$

Traži se volumen tijela, koje je omeđeno sedlastom plohom, plaštevima dvaju kružnih valjaka i trima koordinatnim ravninama.

Prema sl. 115 i formulama (111a) i (111b) računamo:



Sl. 115

$$V = \iint_{\sigma} xy\,dx\,dy = \iint_{\sigma'} \rho^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \rho d\rho \cdot d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \cos\varphi\,d\varphi \int_1^3 \rho^3\,d\rho = \left| \frac{\sin^2\varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_1^3$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(81 - 1) = 10$$

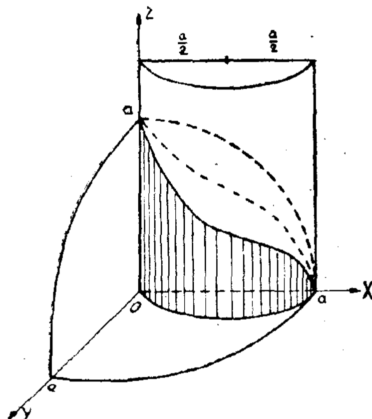
$$\underline{V = 10}$$

3. Riješimo t. zv. Vivianijev zadatak (1622—1703).

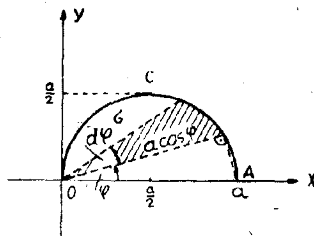
Izračunaj zajednički volumen kugle polumjera a i kružnog valjka polumjera $\frac{a}{2}$, čiji plašt prolazi središtem kugle.

Slika 116 prikazuje zadano tijelo.

Budući da je tijelo, čiji volumen tražimo, simetrično obzirom na koordinatne ravnine XZ i XY, računat ćemo samo četvrtinu volumena, koji se nalazi u prvom oktantu.



Sl. 116



Sl. 117

Iz slike 117, koja predočuje područje integracije σ i projekcije sloja traženog volumena za neki konstantni φ, vidimo, da se ρ mijenja od 0 do $a \cos \varphi$, a φ od 0 do $\frac{\pi}{2}$, pa uzevši u obzir, da jednadžba zadane kugle glasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

dobijemo prema (111a):

$$\frac{V}{4} = \iint_{\sigma} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \iint_{\sigma} \sqrt{a^2 - \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi}\; \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \sqrt{a^2 - \rho^2}\; \rho\, d\rho$$

Kako je uz supstituciju $a^2 - \rho^2 = t$

$$\int \sqrt{a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - \rho^2)^3}$$

dobijemo dalje:

$$\frac{V}{4} = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sqrt{(a^2 - \rho^2)^3} \right|_0^{a \cos \varphi} d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\sqrt{(a^2 - a^2 \cos^2 \varphi)^3} - \sqrt{a^6} \right] d\varphi = \right.$$

$$= -\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{(1-\cos^2\varphi)^3}-1\right]d\varphi = -\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\sin^6\varphi}-1)\,d\varphi =$$

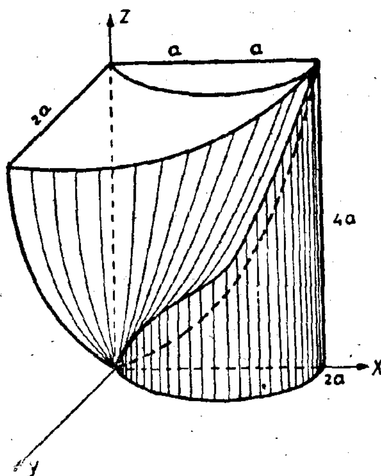
$$= -\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\varphi-1)\,d\varphi = \frac{a}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi\right] =$$

$$= \text{Dio II. § 5, 7. Tip VIII. primjer 2.} = \frac{a^3}{3}\left|\varphi+\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{3}+\frac{2}{3}\cos\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

$$V = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

Zanimljivo je, da se volumen V_0 onog dijela polukugle, koji ostane, ako uklonimo izračunato tijelo, izražava racionalno pomoću polumjera a kugle:

$$V_0 = \frac{2}{3}a^3\pi - \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}a^3$$



Sl. 118

4. Izračunaj volumen tijela, koje je omeđeno plohama rotacionog paraboloida

$$x^2 + y^2 = az,$$

valjka

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

i ravninama

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{i} \quad z = 0$$

(slika 118).

Napisavši jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

u obliku

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

ili

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

vidimo, da je područje integracije σ opet polukrug kao u primjeru 3, pa uzevši u obzir, da je polumjer toga polukruga sada a, dobijemo prema (111a):

$$V = \frac{1}{a}\iint_\sigma (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{a}\iint_{\sigma'}(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{2a\cos\varphi} =$$

$$= \frac{1}{4a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16a^4 \cos^4\varphi\, d\varphi = 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \text{prema Dijelu II. str. 149} =$$

$$= 4a^3 \left| \frac{\sin\varphi \cdot \cos^3\varphi}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^3 \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{3}{4} a^3 \pi$$

$$V = \frac{3}{4} a^3 \pi$$

---

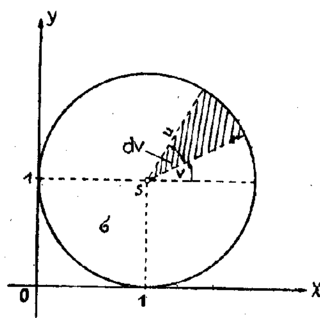
5. Odredi volumen tijela, koje je omeđeno s

$$z = xy$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad ; \quad z = 0$$

Zadano tijelo je uspravni kružni valjak polumjera baze $r = 1$ sa središtem u točki $S(1, 1)$, koji je omeđen odozgo hiperbolnim paraboloidom $z = xy$, a odozdo ravninom XY $(z = 0)$

Kako je kružnica specijalni slučaj elipse, kojoj su poluosi $a = b = r$, primijenimo eliptičke koordinate (113) pa prema slici 119 imamo.

$$x = 1 + 1 \cdot u \cos v$$
$$y = 1 + 1 \cdot u \sin v$$



Sl. 119

Računamo prema (112):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u$$

pa prema (113b) imamo, uzevši u obzir, da je u našem slučaju $a = b = 1$:

$$V = \iint_{\sigma} xy\, dx\, dy = \iint_{\sigma'} (1 + u\cos v)(1 + u \sin v) u\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (1 + u\cos v + u \sin v + u^2 \sin v \cos v)\, u\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \frac{u^2}{2} + \frac{\cos v}{3} u^3 + \frac{\sin v}{3} u^3 + \sin v \cos v \frac{u^4}{4} \right|_0^1 dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos v + \frac{1}{3} \sin v + \frac{\sin v \cdot \cos v}{4} \right) dv =$$

$$= \left| \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \sin v - \frac{1}{3} \cos v + \frac{1}{8} \sin^2 v \right|_0^{2\pi} = \pi - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \pi$$

$$\underline{V = \pi}$$

Taj primjer možemo riješiti i prema (111c) uzevši $z = (x - 1)(y - 1)$, t. j. pomaknuvši koordinatni sustav u $S(1, 4)$

6. Izračunaj volumen uspravnog eliptičkog valjka s osnovkom $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ u ravnini XY, koji je presječen ravninom $z = 12 - 3x - 4y$.

Uzevši u obzir da je $a = 2$ a $b = 1$, računamo prema (113b):

$$V = 2 \cdot 1 \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (12 - 3 \cdot 2 u \cos v - 4 \cdot 1 u \sin v) u \, du =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} dv \left| 6u^2 - 2 \cos v \, u^3 - \frac{4}{3} \sin v \cdot u^3 \right|_0^1 = 2 \int_0^{2\pi} \left(6 - 2 \cos v - \frac{4}{3} \sin v \right) dv =$$

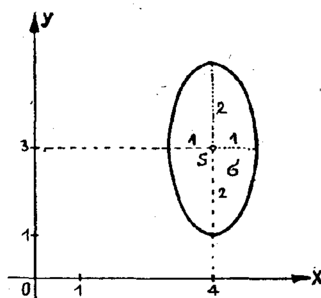
$$= 2 \left| 6v - 2 \sin v + \frac{4}{3} \cos v \right|_0^{2\pi} = 2 \left(12 \pi + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right) = 24 \pi$$

$$\underline{V = 24 \pi}$$

7. Izračunaj volumen tijela omeđena s

$$z = xy + 2x - 5$$

$$(x - 4)^2 + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1; \quad z = 0.$$



Sl. 120

Kako je područje integracije σ (vidi sl. 120) elipsa sa središtem u točki $S(4, 3)$ i poluosima $a = 1$ i $b = 2$, imamo prema (113) i obzirom na sliku 120:

$$x = 4 + 1 u \cos v$$
$$y = 3 + 2 u \sin v$$

Prema (112) dobijemo

$$dx \, dy = \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du \, dv = 2 u \, du \, dv$$

pa prema (113b) računamo:

$$V = 2 \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \left[(4 + u \cos v)(3 + 2 u \sin v) + 2 (4 + u \cos v) - 5 \right] u \, du =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (15u + 5u^2 \cos v + 8 u^2 \sin v + 2u^3 \sin v \cdot \cos v) du =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} dv \left| \frac{15}{2} u^2 + \frac{5}{3} u^3 \cos v + \frac{8}{3} u^3 \sin v + \frac{1}{2} u^4 \sin v \cos v \right|_0^1 =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{15}{2} + \frac{5}{3}\cos v + \frac{8}{3}\sin v + \frac{1}{2}\sin v\cos v\right)dv =$$

$$= 2\left|\frac{15}{2}v + \frac{5}{3}\sin v - \frac{8}{3}\cos v + \frac{1}{4}\sin^2 v\right|_0^{2\pi} = 2\left(15\pi - \frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) = 30\pi$$

$$\underline{V = 30\pi}$$

Odredi uz zamjenu promjenljivih obujam tjelesa omeđenih s

1. $z = \frac{x^2}{a^2}$

$x^2 + y^2 = r^2 \quad ; \quad z = 0$ $\left[V = \frac{8r^6}{15a^2}\right]$

2. $4z = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 = 8x$ $[V = 96\pi]$

3. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
$x^2 + y^2 = rx \quad ; \quad z = 0$ $\left[V = \frac{r^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)\right]$

4. $z = xy + x + y + 1$
$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \quad ; \quad z = 0$ $[V = 144\pi]$

5. Izračunaj volumen dijela valjka $x^2 + y^2 = r^2$ između ravnina

$z = 0$ i $z = mx$ $\left[V = \frac{2}{3}r^3 m\right]$

6. Izračunaj volumen tijela, koje je omeđeno hiperbolnim paraboloidom $cz = xy$, ravninom $z = 0$ i valjkom $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\left[V = \frac{\pi abr^2}{c}\right]$

4. Zamjena promjenljivih u trostrukom integralu

Najčešće se vrši prijelaz od pravokutnih koordinata, u kojim je zadan trostruki integral, na cilindričke i na kugline koordinate. Stoga ćemo potanko promotriti ta dva slučaja, dok ćemo opet opći slučaj zamjene promjenljivih obrazložiti samo ukratko.

a) Cilindričke koordinate

Kako se vidi iz slike 121, položaj točke T u prostoru posve je određen, ako znamo polarne koordinate φ i ρ njene projekcije T' na ravninu XY i njenu aplikatu z. Koordinate se zovu cilindričke, jer jednadžba $\rho = c$ (const.) predočuje prostorno kružni valjak polumjera osnovke c, kojemu je os simetrije os Z.

Iz slike 121 slijedi dalje:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z \tag{114}$$

pri čemu je $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \rho < +\infty$ i $-\infty < z < +\infty$.

To su formule prijelaza od cilindričkih koordinata na pravokutne.

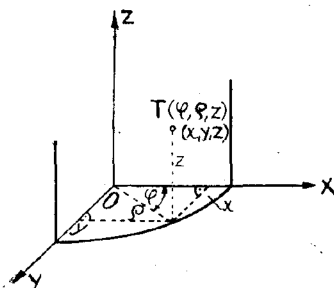
Uzmemo li, da je $\rho = R$ (konstanta), dobit ćemo **parametarsku jednadžbu valjka**, polumjera R, u kojoj su φ i z parametri po volji.

Vidimo, da parametarska jednadžba plohe kao dvodimenzionalnog lika sadrži **dva** parametra, dok u parametarsku jednadžbu jednodimenzionalnog lika (krivulje) ulazi, kako znamo, samo jedan parametar (t). Uzmemo li još u obzir, da $\varphi =$ konst. predočuje ravninu koja prolazi osi Z, a $z =$ const. ravninu paralelnu s ravninom XY, shvatit ćemo, da u slučaju cilindričkih koordinata koordinatne plohe

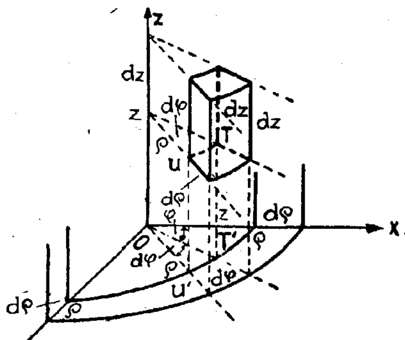
$$\varphi = \text{const.}; \qquad \rho = \text{const.} \quad \text{i} \quad z = \text{const.}$$

predočuju tri familije ravnina i to:

$\varphi =$ konst. su poluravnine kroz os Z,
$\rho =$ konst. su krugovi, kojima je os Z u središtu,
a $z =$ konst. su ravnine paralelne s ravninom XY.



Sl. 121



Sl. 122

Svakom točkom prostora, koja ne leži na osi Z, prolazi po jedna od tih ploha. Te koordinatne plohe dijele čitav prostor u ćelije, čiji oblik vidimo na sl. 122. Dademo li naime φ prirast $d\varphi$, ρ prirast $d\rho$, a z prirast dz, dobit ćemo element dW prostora W, u kojem je definirana funkcija $f(x, y, z)$. Smatrajući taj element paralelopipedom, dobijemo uzevši u obzir, da je

$$\widehat{TU} = \widehat{T'U'} = \rho d\varphi$$

volumen elementa = baza $\times$ visina $= dV = \rho d\rho \, d\varphi \cdot dz$

t. j.

$$dV = \rho d\rho \, d\varphi \, dz \tag{115}$$

Budući da je prema (108)

$$dV = dx \, dy \, dz$$

imamo

$$dV = dx\, dy\, dz = \rho d\rho\, d\varphi\, dz \tag{115a}$$

pa uzevši u obzir formule (114) dobijemo konačno traženu **formulu zamjene u trostrukom integralu pravokutnih koordinata cilindričkim:**

$$\iiint_V f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \tag{116}$$

Računanje trostrukih integrala u cilindričkim koordinatama svodi se na tri jednokratna integriranja po z, ρ i φ, a vrši se prema istim već nam poznatim načelima [vidi primjer 3. u točki 5. h) ovog §].

U svim tim slučajevima, kad je područje integracije uspravan kružni valjak, uvijek prelazimo pri računanju trostrukih integrala na cilindričke koordinate, jer su u tom slučaju sve granice integracije konstantne.

Tako na pr. za $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \rho \leq R$ i $0 \leq z \leq h$, t. j. ako je područje integracije V uspravni valjak visine h i polumjera osnovke R, dobijemo:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho\, d\rho \tag{116a}$$

Za $f(x, y, z) = 1$ dobijemo volumen V toga valjka:

$$V = \iiint_V dx\, dy\, dz = \iiint_V \rho d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho =$$

$$= h \cdot 2\pi \left| \frac{\rho^2}{2} \right|_0^R = \underline{R^2 \pi h}$$

b) Kugline (sferne) ili prostorne polarne koordinate

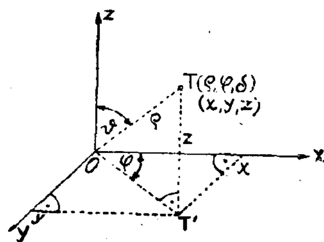
Položaj točke T u prostoru posve je određen, kad je poznata udaljenost ρ te točke od ishodišta O koordinatnog sustava, kut ϑ, što ga taj radijvektor ρ zatvara s osi Z i konačno kut φ, što ga projekcija OT' radijvektora ρ na ravninu XY zatvara s osi X (vidi sl. 123).

Iz te slike slijedi, da je

$$OT' = \rho \sin \vartheta$$

pa je

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= \rho \cos \vartheta \end{aligned} \tag{117}$$



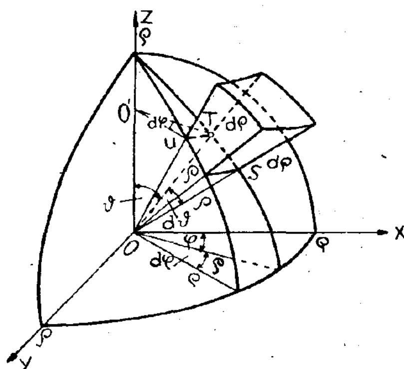
Sl. 123

pri čemu je

$$0 \leq \varphi < 2\pi; \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi; \quad 0 \leq \rho < +\infty.$$

To su formule prijelaza od kuglinih koordinata na pravokutne.

Uzmemo li, da je $\rho = R$ (konstanta), dobit ćemo jednadžbu kugline plohe (sfere) polumjera R u parametarskom obliku, u kojoj su φ i ϑ parametri, pa φ možemo smatrati geografskom duljinom, a ϑ dopunom do 90° georafske širine točke T (vidi također § 4, 12).



Sl. 124

Koordinatna površina φ = konst. predstavlja sada polukrugove, kojima os Z prolazi kroz središte, ρ = konst. su kugline plohe sa središtem u ishodištu 0, a ϑ = konst. su plaštevi stožaca, kojima je os Z zajednička os.

Te koordinatne plohe dijele prostor u ćelije, čiji oblik vidimo na slici 124.

Dademo li kuglinim koordinatama φ, ϑ i ρ neke točke T kugline plohe priraste $d\varphi$, $d\vartheta$ i $d\rho$, tada dobijemo lik prikazan na slici 124.

Uz pretpostavku, da su ti prirasti beskonačno male veličine, možemo uzeti, da je taj lik pravokutni paralelopiped, pa njegov volumen dV računati kao umnožak površine osnovke i visine $d\rho$.

Uzevši u obzir, da je

$\widehat{UT} = \rho \sin \vartheta \cdot d\varphi$ (UT je luk kugline paralele, kojoj je polumjer $TO' = \rho \sin \vartheta$)

i da je
$$\widehat{TS} = \rho \cdot d\vartheta$$

imamo:
$$dV = \rho \sin \vartheta \cdot d\varphi \cdot \rho\, d\vartheta \cdot d\rho$$

ili
$$dV = \rho^2 \sin \vartheta \cdot d\varphi \cdot d\vartheta \cdot d\rho \tag{118}$$

a kako je prema (108)
$$dV = dx\, dy\, dz$$

dobijemo
$$dV = dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin \vartheta \cdot d\varphi \cdot d\vartheta \cdot d\rho \tag{118a}$$

Prema tome uzevši u obzir i formule (117) dolazimo konačno do tražene formule zamjene u trostrukom integralu pravokutnih koordinata kuglinim:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_V f(\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta) \cdot \rho^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, d\rho \tag{119}$$

Računanje trostrukog integrala u kuglinim koordinatama vrši se kao u predašnjim slučajevima i svodi se na jednokratna integriranja po ρ, φ i ϑ, kako će se vidjeti iz primjera u točki 5. g) ovog §.

Ako je područje integracije V kugla, imat ćemo konstantne granice za sva tri integrala.

Za $f(x, y, z) = 1$ i $\rho = R$ (konstanta) dobijemo volumen kugle. Prema (119) imamo u tom slučaju:

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_0^{R} \rho^2\, d\rho = \Big|\varphi\Big|_0^{2\pi} \Big|-\cos\vartheta\Big|_0^{\pi} \Big|\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{R} =$$

$$= 2\pi \cdot (+1 + 1) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

Mijenjajući granice integracije u drugom integralu, dobijemo poznate formule iz stereometrije za obujam pojedinih dijelova kugle.

Tako, na pr., za volumen kuglinog isječka dobijemo:

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_0^{R} \rho^2\, d\rho = 2\pi \Big|-\cos\vartheta\Big|_0^{\vartheta} \frac{R^3}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 (-\cos\vartheta + 1) = \frac{2}{3}\pi R^2 (R - R\cos\vartheta) = \frac{2}{3}\pi R^2 v.$$

$$\text{ili}\quad V = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos\vartheta) = \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

Izračunaj na taj način volumen kuglinog pojasa (sloja) [Vidi Repetitorij elementarne matematike, II, § 2, f) sl. 33b i a].

c) Opći slučaj

Uzmimo sada opći slučaj, kad treba u trostrukom integralu zamijeniti promjenljive x, y i z novim promjenljivima u, v i t, koje su s njima vezane jednadžbama:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, t) \\ y &= y(u, v, t) \\ z &= z(u, v, t) \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

pri čemu pretpostavljamo, da su te jednadžbe takove, da svakoj točki $T(x, y, z)$ područja W u prostoru pravokutnog koordinatnog sustava XYZ odgovara jedna točka $T'(u, v, t)$ u nekom području W' u prostoru pravokutnog koordinatnog sustava UVT, i obratno. Drugim riječima, pretpostavljamo, da funkcije (a) uzajamno jednoznačno preslikavaju područje W na područje W' (i obratno).

Diskutirajući na isti način kao u slučaju dvostrukog integrala i označivši s dV i dV' elemente volumena područja W, odnosno W', dobit ćemo

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_V f[x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)] \frac{dV}{dV'} \cdot du\, dv\, dt \qquad (120)$$

gdje je $\frac{dV}{dV'}$ koeficijent deformacije volumena pri preslikavanju područja W u područje W' prema formuli (120). Taj koeficijent deformacije jednak je u svakoj točki područja apsolutnoj vrijednosti Jacobijeve determinante

$$\frac{dV}{dV'} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} \right|$$

gdje je

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} \qquad (120a)$$

Primijenimo li te formule (120) i (120a) za slučaj prijelaza u trostrukom integralu na cilindričke, odnosno kugline koordinate (načini to!), dobit ćemo već nam poznate formule (116), odnosno (119). Međutim, te formule ne smijemo u tom slučaju smatrati kao formule prijelaza u trostrukom integralu od pravokutnih koordinata na cilindričke, odnosno kugline u istom području W, već kao formule nekih posebnih transformacija u trostrukom integralu od pravokutnih koordinata opet na pravokutne koordinate, ali u drugim, pripadnim područjima W'.

5. Primjena dvostrukih i trostrukih integrala

Rekli smo već, da promatranje dvostrukog i trostrukog integrala kao volumena tijela omeđenog zadanom plohom, daje samo geometrijsko značenje tih integrala. Sada ćemo navesti mnogobrojne primjene višestrukih integrala.

a) Površina ravnih likova

Pokazali smo, da površinu ravnih likova možemo računati i pomoću dvostrukog integrala, jer je $dS = dx\, dy$ površina elementa ravna lika, pa je površina ravna lika:

$$S = \iint_S dx\, dy \qquad (121)$$

pri čemu smo iz navedenog primjera (vidi str. 228) vidjeli, da taj način računanja nema općenito smisla, jer nakon prvog integriranja prelazimo automatski na obični

jednostruki integral. Međutim, ako je zadani ravni lik omeđen s dvije krivulje, isplati se računati njegovu površinu pomoću dvostrukog integrala, jer se u tom slučaju jednostavnije određuju granice integracije. Pokažimo to na primjerima.

Primjeri.

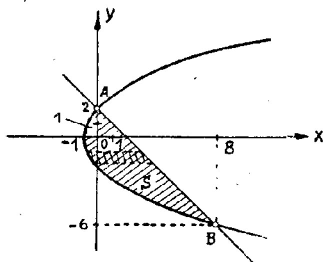
1. Odredi površinu lika omeđenog parabolom $y^2 = 4x + 4$ i pravcem $y = 2 - x$.

Narišimo zadani lik (sl. 125) prethodno izračunavši sjecišta $A(0, 2)$ i $B(8, -6)$ parabole i pravca, a također vrh $V(0, -1)$ zadane parabole $y^2 = 4(x + 1)$. Element tražene površine uzmemo u smjeru osi X, pa napisavši jednadžbe parabole i pravca u obliku $x = \frac{y^2 - 4}{4}$ i $x = 2 - y$ računamo prema slici i formuli (121):

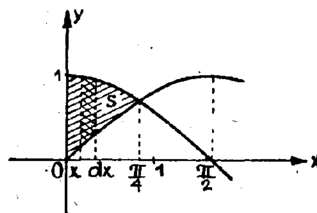
$$S = \iint_S dx\,dy = \int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx =$$

$$= \int_{-6}^{2} dy \left| x \right|_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} = \int_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2 - 4}{4}\right) dy =$$

$$= \left| 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} + y \right|_{-6}^{2} = 6 - 2 - \frac{2}{3} + 18 + 18 - 18 = 21\frac{1}{3}$$



Sl. 125



Sl. 126

Da smo element tražene površine uzeli u smjeru osi Y, t. j. da smo integrirali prvo po y, a zatim po x, morali bismo izračunati dva integrala, a granice integracije bile bi iracionalne:

$$S = \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{+\sqrt{4x+4}} dy + \int_{0}^{8} dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{2-x} dy$$

2. Izračunaj površinu lika omeđena s

$$y = \sin x \quad ; \quad y = \cos x \quad ; \quad x = 0.$$

Kako je $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, imamo prema slici 126 i formuli (121):

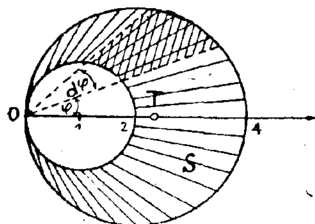
$$S = \iint_S dx\,dy = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = \Big| \sin x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \underline{\sqrt{2} - 1}$$

Jasno je, da i površinu lika omeđenog krivuljama, čije su jednadžbe zadane u polarnim koordinatama, možemo izračunati pomoću dvostrukog integrala uzevši da je podintegralna funkcija jednaka 1. Na taj način dobijemo prema (111):

$$S = \iint_S \rho\, d\rho\, d\varphi \tag{122}$$



Sl. 127

Primjer

Odredi površinu lika, što ga omeđuju kružnice $\rho = 2 \cos \varphi$ i $\rho = 4 \cos \varphi$.

Prema slici 127 i formuli (122) imamo:

$$S = \iint_S \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho\, d\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| \frac{\rho^2}{2} \right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (16 \cos^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi)\, d\varphi =$$

$$= 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi\, d\varphi = 6 \left| \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 6 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \underline{3\pi}$$

Kontrola. $\underline{S} = 2^2 \pi - 1^2 \pi = \underline{3\pi}$.

Izračunaj pomoću dvostrukih integrala površine ravnih likova, koji su omeđeni s

1. $3y^2 = 25x \quad ; \quad 5x^2 = 9y$ $\qquad [S = 5]$

2. $xy = 4 \quad ; \quad x + y - 5 = 0$ $\qquad [S = \frac{1}{2}(15 - 8 \ln 4)]$

3. Riješi pomoću dvostrukih integrala primjere 1. i 2. navedene u dijelu II. Repetitorija § 7, 1. a) 1.

b) Masa ravnih likova

Predočimo si, da je zadani ravni lik jednoliko pokriven nekom homogenom materijom. U tom je slučaju

$$\text{gustoća } \mu = \frac{\text{masa}}{\text{površina lika}} = \frac{m}{S} = \text{konstanta u svim točkama lika.}$$

Ako je materija, koja jednoliko pokriva lik, nehomogena, gustoća se mijenja od točke do točke, ona je funkcija od x i y, t. j.

$$\text{gustoća } \mu = \mu(x, y).$$

Označimo li s dm površinsku masu elementa lika u nekoj njegovoj točki $T(x, y)$ (diferencijal mase), a s dS površinu toga lika (vidi sl. 128), bit će gustoća u toj točki $T(x, y)$:

$$\mu(x, y) = \frac{dm}{dS} \tag{123}$$

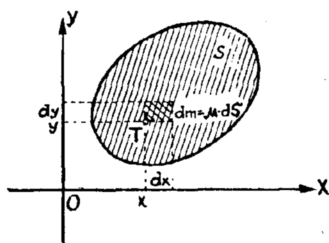
a odatle je

$$dm = \mu(x, y)\, dS$$

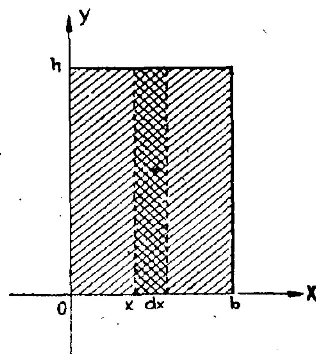
a kako je $dS = dx\, dy$

$$dm = \mu(x, y)\, dx\, dy \tag{123a}$$

Tako smo dobili izraz za diferencijal mase ravna lika.



Sl. 128



Sl. 129

Čitavu masu lika dobijemo integrirajući po površini lika:

Masa nehomogena ravna lika $m = \iint_S \mu(x, y)\, dx\, dy$ (123b)

Primjer

Odredi masu pravokutnika gustoće $\mu = xy$, kojemu su stranice b i h (sl. 129).

Prema (123b):

$$m = \iint_S xy\, dx\, dy = \int_0^b x\, dx \int_0^h y\, dy =$$

$$= \frac{b^2}{2} \cdot \frac{h^2}{2} = \underline{\frac{b^2 h^2}{4}}$$

Ako je lik homogen, t. j. $\mu = \text{konst.}$, formula (123b) prima oblik:

$$m = \mu \iint_S dx\,dy = \mu \cdot S$$

a za

$$\mu = 1$$

$$m = S$$

t. j. ako je ravan lik homogen, a gustoća $\mu = 1$, masa lika numerički je jednaka njegovoj površini.

U tom slučaju određivanje mase ravna lika svodi se na računanje njegove površine.

c) Statički momenti i koordinate težišta ravnih likova

Govoreći u dijelu II. Repetitorija (vidi § 7, 2.) o primjeni jednostrukih određenih integrala, već smo potanko obradili to pitanje, pa znamo, da je statički moment M ravna lika, za koji pretpostavljamo da je homogen gustoće $\eta = 1$, obzirom na neku os jednak umnošku površine S toga lika i udaljenosti njegova težišta od dotične osi, t. j.

$$M_x = \int_S y\,dS \quad \text{i} \quad M_y = \int_S x\,dS \tag{a}$$

Znamo također, da podijelivši statički moment lika s površinom S lika dobijemo koordinate težišta toga lika:

$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_S x\,dS}{\int_S dS} \quad \text{i} \quad y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\int_S y\,dS}{\int_S dS} \tag{b}$$

U mnogim slučajevima određivanje statičkih momenata i koordinata težišta ravnih likova vrši se jednostavnije pomoću dvostrukih integrala. Taj prijelaz na dvostruke integrale možemo lako izvršiti, ako se sjetimo, da je

$$dS = dx\,dy$$

Formule (a) i (b) primaju tada oblik:

$$M_x = \iint_S y\,dx\,dy \quad ; \quad M_y = \iint_S x\,dx\,dy \tag{124}$$

$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\iint_S x\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy} \; ; \quad y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint_S y\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy} \tag{125}$$

Uvrstimo li u (124) $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$, a također prema (110) $dS = \rho d\rho\, d\varphi$, dobijemo iste formule u polarnim koordinatama:

$$x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\iint_S \rho^2 \cos \varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint_S \rho\, d\rho\, d\varphi} \quad y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint_S \rho^2 \sin \varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint_S \rho\, d\rho\, d\varphi} \tag{125a}$$

Primjeri.

1. Odredi statičke momente pravokutnika osnovke b i visine h obzirom na njegove stranice (vidi gore sl. 129).

Prema (124)

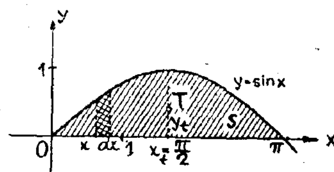
$$M_x = \iint_S y\,dx\,dy = \int_0^b dx \int_0^h y\,dy = \Big| x \Big|_0^b \cdot \Big| \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{bh^2}{2} = S \cdot \underline{\frac{h}{2}},$$

gdje je $S = bh$ = površina pravokutnika.

Na isti način dobijemo:

$$M_y = \frac{hb^2}{2} = S \cdot \underline{\frac{b}{2}}$$

a prema (125) $\quad x_t = \underline{\frac{b}{2}} \;;\; y_t = \underline{\frac{h}{2}}$



Sl. 130

2. Odredi koordinate težišta lika omeđenog sinusoidom od $x = 0$ do $x = \pi$ i osi X (sl. 130).

Prema slici: $\quad x_t = \underline{\frac{\pi}{2}}$

Prema (125):

$$y_t = \frac{\iint_S y\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy} = \frac{\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y\,dy}{\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}{\int_0^\pi \sin x\,dx} = \frac{\Big| \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^\pi}{2\Big| -\cos x \Big|_0^\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \underline{\frac{\pi}{8}}$$

Izračunaj za vježbu x_t!

2. Odredi težište lika omeđenog kružnicama

$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad$ i $\quad (x-2)^2 + y^2 = 4$ (vidi sl. 127 i primjer uz tu sliku).

Prema toj slici i (125):

$$y_t = 0 \;;\; x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{M_y}{3\pi} \qquad \text{(a)}$$

Napisavši jednadžbe zadanih kružnica u polarnim kordinatama

$$\rho = 2\cos\varphi \quad \text{i} \quad \rho = 4\cos\varphi$$

računamo M_y prema (125a):

$$M_y = \iint_S \rho^2 \cos\varphi\,d\rho\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \left| \frac{\rho^3}{3} \right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,(64\cos^3\varphi - 8\cos^3\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 7\cos^4\varphi d\varphi = \text{prema tipu VIII. (Dio II. § 5, 7.)} =$$

$$= \frac{56}{3} \left| \frac{\cos^3\varphi \sin\varphi}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{56}{3}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \underline{7\pi}$$

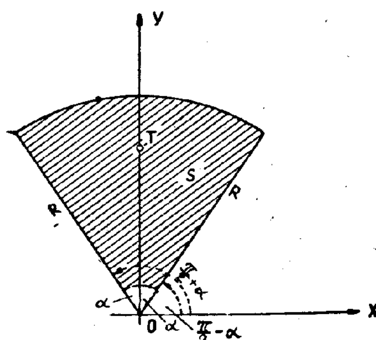
Prema (a):

$$x_t = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3} = \underline{2\frac{1}{3}}$$

$$\underline{\text{Težište } \left(\frac{7}{3}, 0\right)}$$

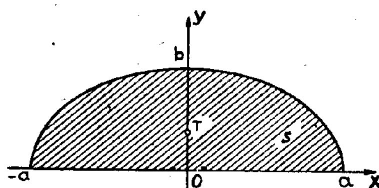
4. Odredi težište kružnog isječka (sl. 131), kojemu odgovara središnji kut 2α.

Prema slici i (125a):



Sl. 131

$$\underline{x_t = 0} \quad ; \quad y_t = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho}{\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} d\varphi \int_0^R \rho d\rho} =$$



Sl. 132

$$= \frac{\frac{R^3}{3} \left| -\cos\varphi \right|_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}}{\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{R(\sin\alpha + \sin\alpha)}{3\alpha} = \underline{\frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

5. Odredi težište polovine elipse, koja leži iznad njene velike osi 2a (sl. 132).

$$\underline{x_t = 0}$$

y_t računamo prema (125), izvršivši prema (113) prijelaz na eliptičke koordinate:

$$x = au \cos v$$

$$y = b\,u \sin v$$

$$dx\,dy = ab\,u\,du\,dv$$

$$y_t = \frac{ab^2 \int\int_S u^2 \sin v\,du\,dv}{ab \int\int_S u\,du\,dv} = \frac{b \int_0^1 u^2\,du \int_0^\pi \sin v\,dv}{\int_0^1 u\,du \int_0^\pi dv}$$

$$= \frac{\frac{b}{3} \Big| -\cos v \Big|_0^\pi}{\frac{1}{2} \cdot \pi} = \frac{2}{3}\frac{b}{\pi} \cdot 2 = \underline{\frac{4b}{3\pi}}$$

Odredi pomoću dvostrukog integrala težište:

1. Trokuta osnovke b i visine h obzirom na osnovku $\left[y_t = \frac{h}{3}\right]$

2. Petlje lemniskate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ $\left[x_t = \frac{\pi \sqrt{2a}}{8}\right]$

3. Kardioide $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ $\left[x_t = \frac{5a}{6}\right]$

4. Polukruga obzirom na promjer $\left[y_t = \frac{4R}{3\pi}\right]$

Riješi pomoću dvostrukih integrala primjere navedene u Dijelu II. § 7. 2.

d) Momenti tromosti (inercije) ravnih likova

Iz Dijela II. Repetitorija (vidi § 7, 3) znamo izraze za t. zv. geometrijske momente tromosti ravnih likova, t. j. homogenih likova gustoće $\eta = 1$.

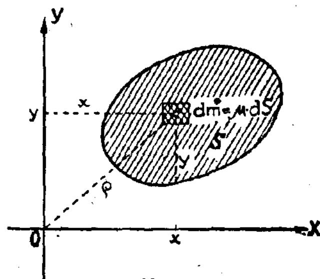
Aksijalni momenti.

$$I_x = \int_S y^2 dS$$

$$I_y = \int_S x^2 dS$$

Polarni moment: $$I_p = \int_S \rho^2 dS$$

(vidi sl. 133).



Sl. 133

Sve te momente već znamo računati pomoću običnih jednostrukih integrala, ali se jednostavnije računaju, kao ćemo vidjeti, pomoću dvostrukih integrala.

Postoji još jedan moment, koji ne možemo izračunati pomoću jednostrukih integrala, to je centrifugalni moment ili moment devijacije obzirom na osi X i Y:

$$I_{xy} = \int_S xy \, dS$$

Dok su svi momenti tromosti uvijek pozitivne veličine ($x^2 > 0$, $y^2 > 0$ i $\rho^2 > 0$), centrifugalni moment lika je negativan za one njegove dijelove, koji leže u II. i IV. kvadrantu, jer u tim kvadrantima x i y imaju različite predznake, pa je $x \cdot y < 0$. Prema tome je $I_{xy} = 0$, ako je jedna od osi X i Y, ili obje, os simetrije zadanog lika. To su t. zv. glavne osi tromosti.

Uz $dS = dx\,dy$ primaju navedeni izrazi za momente tromosti ravna lika oblik:

Aksijalni momenti tromosti:

$$I_x = \iint_S y^2 \, dx\,dy \quad ; \quad I_y = \iint_S x^2 \, dx\,dy \quad ; \quad I_{xy} = \iint_S xy \, dx\,dy \tag{126}$$

Polarni moment tromosti obzirom na ishodište koordinatnog sustava:

$$I_p = I_o = \iint_S \rho^2 \, dx\,dy \tag{127}$$

Kako je prema slici 133 $\rho^2 = x^2 + y^2$, dobijemo za polarni moment tromosti obzirom na formule (126) izraz

$$I_p = I_o = \iint_S (x^2 + y^2) dx\,dy = \iint_S y^2 dx\,dy + \iint_S x^2 dx\,dy = I_x + I_y \tag{127a}$$

Time smo izvršili prijelaz na dvostruke integrale, jer se ti izrazi, kako smo već rekli, u mnogim slučajevima jednostavnije računaju pomoću dvostrukih integrala.

Uzmemo li u obzir, da je $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ i $dx\,dy = \rho d\rho\,d\varphi$ [vidi (110)], dobijemo prema (126) formule za momente tromosti u polarnim koordinatama.

$$I_x = \iint_S \rho^3 \sin^2 \varphi \, d\rho\,d\varphi \quad ; \quad I_y = \iint_S \rho^3 \cos^2 \varphi \, d\rho\,d\varphi$$

$$I_{xy} = \iint_S \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi \, d\rho\,d\varphi \tag{128}$$

dok je prema (127a)

$$I_p = I_o = \iint_S \rho^3 \, d\rho\,d\varphi \tag{129}$$

Kako se momenti tromosti računaju pomoću dvostrukih integrala, pokažimo na primjerima.

Primjeri

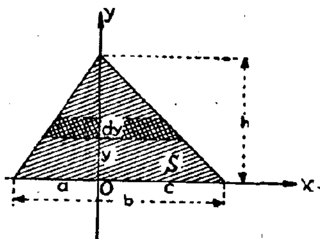
1. Izračunaj I_x, I_y, I_0 i I_{xy} za pravokutnik prikazan na slici 129.

Prema (126)

$$I_x = \iint_S y^2\,dx\,dy = \int_0^b dx \int_0^h y^2\,dy = \underline{\frac{bh^3}{3}}$$

$$I_y = \iint_S x^2\,dx\,dy = \int_0^b x^2\,dx \int_0^h dy = \underline{\frac{hb^3}{3}}$$

$$I_{xy} = \iint_S xy\,dx\,dy = \int_0^b x\,dx \int_0^h y\,dy = \underline{\frac{b^2h^2}{4}}$$



Sl. 134

Prema (127a)

$$I_p = I_o = I_x + I_y = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

2. Izračunaj I_x, I_y i I_{xy} za trokut prikazan na slici 134.

Označivši s a i c dijelove osnovke b trokuta $(a + c = b)$ i uzevši u obzir, da su jednadžbe stranica trokuta

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{h} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{x}{c} + \frac{y}{h} = 1$$

pa je

$$x = -a\left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad \text{i} \quad x = c\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

računamo prema (126) i slici 134:

$$I_x = \iint_S y^2 dx\,dy = \int_0^h y^2\,dy \int_{-a\left(1-\frac{y}{h}\right)}^{c\left(1-\frac{y}{h}\right)} dx =$$

$$= \int_0^h y^2 \left[c\left(1 - \frac{y}{h}\right) + a\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right] dy =$$

$$= \left| c\frac{y^3}{3} - \frac{c}{h}\cdot\frac{y^4}{4} + a\frac{y^3}{3} - \frac{a}{h}\frac{y^4}{4}\right|_0^h =$$

$$= \frac{ch^3}{3} - \frac{ch^3}{4} + \frac{ah^3}{3} - \frac{ah^3}{4} = \frac{1}{12}(ch^3 + ah^3) = \frac{1}{12}h^3(c + a) = \underline{\frac{bh^3}{12}} \tag{a}$$

Prema (a):

$$I_y = \frac{h\cdot a^3}{12} + \frac{h\cdot c^3}{12} = \underline{\frac{h(a^3 + c^3)}{12}}$$

$$I_{xy} = \int_0^h y\,dy \int_{-a\left(1-\frac{y}{h}\right)}^{c\left(1-\frac{y}{h}\right)} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^h y\left[c^2\left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 - a^2\left(1 - \frac{y}{h}\right)^2\right] dy =$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{2} \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 y\, dy = \frac{c^2 - a^2}{2} \left| \frac{y^2}{2} - \frac{2}{h} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{y^4}{4} \right|_0^h =$$

$$= \frac{(c + a)\ (c - a)}{2} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{2h^2}{3} + \frac{h^2}{4}\right) = \underline{\frac{b(c - a)\, h^2}{24}}$$

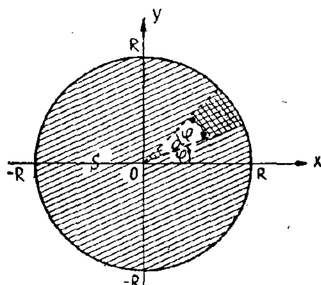
Za $c > a$ je $I_{xy} > 0$, a za $c < a$ je $I_{xy} < 0$, dok za $c = a$ $I_{xy} = 0$ (istokračni trokut, os Y je os simetrije).

3. Izračunaj momente tromosti i centrifugalni moment

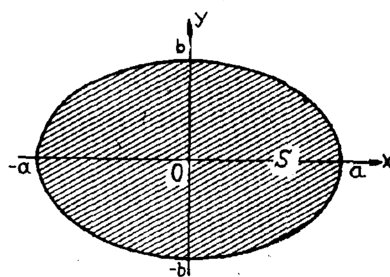
a) kruga polumjera R (sl. 135).

Računamo prema (128):

$$I_x = \iint_S \rho^3 \sin^2 \varphi\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi\, d\varphi \int_0^R \rho^3\, d\rho =$$



Sl. 135



Sl. 136

$$= \frac{R^4}{4} \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right|_0^{2\pi} = \underline{\frac{R^4 \pi}{4}}$$

$$I_y = \iint_S \rho^3 \cos^2 \varphi\, d\rho = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi \int_0^h \rho^3\, d\rho =$$

$$= \frac{R^4}{4} \left| \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right|_0^{2\pi} = \underline{\frac{R^4 \pi}{4}}$$

Isti rezultat, jer je lik simetričan obzirom na obje osi.

$\underline{I_{xy} = 0,}$ jer su osi X i Y osi simetrije kruga (glavne osi).

Prema (127a):

$$I_p = I_o = I_x + I_y = \frac{R^4 \pi}{4} + \frac{R^4 \pi}{4} = \underline{\frac{R^4 \pi}{2}}$$

b) elipse s poluosima a i b (sl. 136).

Računamo prema (126) izvršivši prema (113) prijelaz na eliptičke koordinate:

$$x = au \cos v$$

$$y = bu \sin v$$

$$dx\ dy = ab\ u\ du\ dv$$

$$I_x = \iint\limits_S b^2 u^2 \sin^2 v \cdot ab\, u\, du\, dv = ab^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 v\, dv \int\limits_0^1 u^3\, du = ab^3 \left| \frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right|_0^{2\pi} \left| \frac{u^4}{4} \right|_0^1 = \underline{\frac{ab^3\pi}{4}}$$

Zamijenimo li u tom rezultatu a s b, a b s a, dobijemo:

$$I_y = \underline{\frac{ba^3\pi}{4}}$$

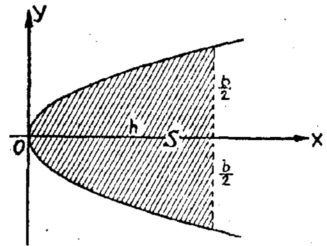
[kontroliraj prema (126)].

$\underline{I_{xy} = 0,}$ jer su osi X i Y osi simetrije elipse (glavne osi).

Prema (127a):

$$I_p = I_o = I_x + I_y = \frac{ab^3\pi}{4} + \frac{ba^3\pi}{4} = \underline{\frac{ab\pi}{4}(a^2 + b^2)}$$

c) parabole (sl. 137).



Sl. 137

$$y^2 = 2px$$

Prema slici $\quad \dfrac{b^2}{4} = 2p \cdot h\quad$, odatle $\quad 2p = \dfrac{b^2}{4h}$

pa je $\quad y^2 = \dfrac{b^2}{4h}x\quad$, odatle $\quad x = \dfrac{4h}{b^2}y^2$

Prema (126):

$$I_x = \iint\limits_S y^2\, dx\, dy = \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2\, dy \int\limits_{\frac{4h}{b^2}y^2}^{h} dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 \left(h - \frac{4h}{b^2}y^2\right) dy = h \left| \frac{y^3}{3} - \frac{4}{b^2} \cdot \frac{y^5}{5} \right|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} =$$

$$= h\left(\frac{b^3}{24} - \frac{4}{b^2} \cdot \frac{b^5}{160} + \frac{b^3}{24} - \frac{4}{b^2} \cdot \frac{b^5}{160}\right) = hb^3\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{20}\right) = \underline{\frac{hb^3}{30}}$$

$$I_y = \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int\limits_{\frac{4h}{b^2}y^2}^{h} x^2\, dx = \frac{1}{3} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(h^3 - \frac{64\,h^3}{b^6}y^6\right) dy =$$

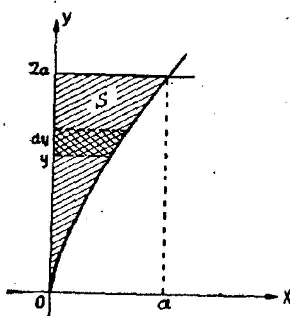
$$= \frac{h^3}{3} \left| y - \frac{64}{b^6} \cdot \frac{y^7}{7} \right|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \underline{\frac{2bh^3}{7}}$$

Prema (127a)

$$I_o = I_x + I_y = \frac{h\,b^3}{30} + \frac{2\,b\,h^3}{7} = b\,h\left(\frac{b^2}{30} + \frac{2h^2}{7}\right)$$

$I_{xy} = 0$, jer je os X os simetrije lika.

2. Izračunaj polarni moment tromosti I_0 lika, koji je omeđen s



Sl. 138

$$y^2 = 4ax \quad , \quad y = 2a \quad i \quad x = 0 \quad \text{(sl. 138).}$$

Prema (127a):

$$I_o = \iint_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2a} dy \int_0^{\frac{y^2}{4a}} (x^2 + y^2)\,dx =$$

$$= \int_0^{2a} dy \left| \frac{x^3}{3} + y^2 x \right|_0^{\frac{y^2}{4a}} = \int_0^{2a} \left(\frac{y^6}{192a^3} + \frac{y^4}{4a}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{4a}\left| \frac{y^7}{336\,a^3} + \frac{y^5}{5} \right|_0^{2a} = \frac{1}{4a}\left(\frac{128\,a^7}{336\,a^3} + \frac{32\,a^5}{5}\right) = \frac{178}{105}a^4$$

Izračunaj I_x i I_y za isti lik, pa rezultate kontroliraj prema (127a):

$$I_x + I_y = I_o = \frac{178}{105}a^4$$

Izračunaj pomoću dvostrukih integrala:

1. I_x, I_y, I_{xy} i I_o za lik omeđen s $x = a$, $y = 0$ i $y = \frac{b}{a}x$

$$\left[I_o = \frac{ab}{12}(3a^2 + b^2) \quad ; \quad I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{8} \right]$$

2. Isto za lik omeđen parabolom, koja prolazi točkom (a, b), a vrh joj je u ishodištu, i pravcem, koji prolazi istim točkama.

$$\left[y^2 = \frac{b^2}{a}x \quad ; \quad I_o = \frac{ab}{4}\left(\frac{a^2}{7} + \frac{b^2}{5}\right) \quad ; \quad I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{24} \right]$$

3. I_o za površinu lemniskate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$

$$\left[I_o = \frac{\pi a^4}{8} \right]$$

4. Isto za površinu kardioide $\rho = a(1 - \cos\varphi)$

$$\left[I_o = \frac{35\pi\,a^4}{16} \right]$$

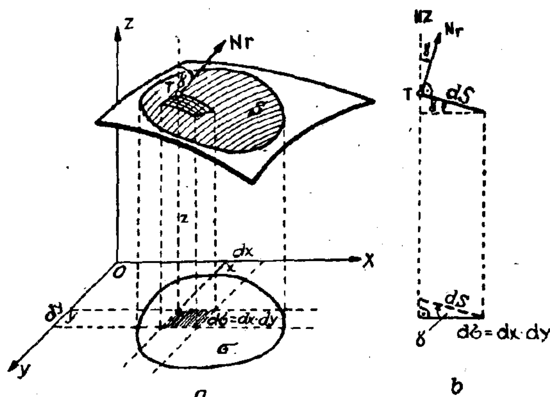
5. I_{xy} za četvrtinu površine kruga i elipse

$$\left[\frac{R^4}{8} \quad ; \quad \frac{a^2 b^2}{8} \right]$$

e) Komplanacija (određivanje površine) ploha

Komplanirati neku zadanu plohu znači odrediti vrijednost njene površine.

Neka je ploha zadana jednadžbom $z = f(x, y)$, gdje je $f(x, y)$ neprekinuta funkcija s neprekinutim parcijalnim derivacijama, pri čemu pretpostavljamo, da pravci usporedni s osi Z probadaju plohu samo u jednoj točki, pa je $z = z(x, y)$ jednoznačna funkcija.



Sl. 139

Tražimo površinu S te plohe i to onog njenog dijela, kojemu odgovara područje σ ravnine XY, gdje je σ projekcija S na ravninu XY (sl. 139).

U nekoj točki $T(x, y, z)$ plohe uzmimo element površine dS te plohe. Kako je element dS beskonačno mali dio plohe, on se podudara s tangentnom ravninom na plohu u točki T pa je ravan.

Jasno je, da je tražena površina S plohe:

$$S = \iint_S dS \tag{a}$$

pri čemu integriramo po površini S zadane plohe.

To je najjednostavniji slučaj t. zv. plošnih integrala, t. j. integrala po površini zadane plohe.

Da taj plošni integral pretvorimo u poznati nam dvostruki, izrazimo površinu dS elementa plohe s njenom projekcijom $d\sigma$ u ravnini XY.

Neka je Nr normala na plohu u točki T, a γ kut, što ga ta normala zatvara s paralelom s osi $+Z$ (slika 139a).

Tada prema slici 139b imamo:

$$d\sigma = dx\, dy = dS \cdot \cos\gamma$$

i

$$dS = \frac{d\sigma}{\cos\gamma} = \frac{dx \cdot dy}{\cos\gamma} \tag{130}$$

Znamo jednadžbu (77a) normale na plohu $z = f(x, y)$ u točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ plohe:

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{-1}$$

gdje su p_1 i q_1 parcijalne derivacije po x i po y funkcije z u toj točki T_1, pa je u točki T plohe

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Kosinuse smjera pravca (normale) znamo izračunati prema (39):

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \tag{130}$$

ili, ako ispred korijena uzmemo predznak minus,

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \tag{130a}$$

Uvrštenje u (130) daje:

$$dS = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \tag{130a)'}$$

Naš plošni integral (a) prelazi obzirom na (130a)' u dvostruki integral uzet po području σ ravnine XY:

$$S = \iint_\sigma \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint_\sigma \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy \tag{131}$$

$$\text{gdje je} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \text{a} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

To je formula za komplanaciju plohe $z = f(x, y)$.

Kako se vrijednost S površine plohe obično uzima po apsolutnoj vrijednosti, ispred drugog korijena uzimamo predznak $+$.

Ako je jednadžba plohe zadana u implicitnom obliku, p i q računamo prema (92a i b).

Kadšto nije moguće izračunati površinu S plohe po formuli (131), t. j. projicirajući plohu na ravninu XY. Na pr. pravci paralelni s osi Z probadaju plohu u dvima točkama ili se ploha projicira u ravninu XY kao krivulja (vidi dalje primjer 3). U tom slučaju dijelimo plohu u dijelove ili projiciramo je u koordinatne ravnine YZ odnosno XZ.

U posljednjem slučaju treba jednadžbu plohe napisati u obliku

$$x = x(y, z), \text{ odnosno } y = y(x, z)$$

i na način prikazan pri izvodu formule (130a) za $\cos\gamma$ izraziti i ostale kosinuse smjera normale na plohu pomoću parcijalnih derivacija funkcija $x(y, z)$ i $y(x, z)$, uzevši u obzir, da u tom slučaju jednadžba normale na plohu glasi

$$\frac{x - x_1}{-1} = \frac{y - y_1}{\frac{\partial x}{\partial y}} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial x}{\partial z}}$$

odnosno

$$\frac{x - x_1}{\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{y - y_1}{-1} = \frac{z - z_1}{\frac{\partial y}{\partial z}}$$

Dobijemo:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}} \qquad (130b)$$

gdje su α i β kutovi, što ih plošna normala zatvara s osi $+X$, odnosno s osi $+Y$

Projekcija elementa površine dS zadane plohe glasi sada:

na ravninu YZ: $$dS = \frac{dy\, dz}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz \qquad (130c)$$

na ravninu XZ: $$dS = \frac{dx\, dz}{\cos\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz \qquad (130d)$$

Odatle je $$S = \iint_{\sigma_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz \qquad (131a)$$

gdje je σ_1 projekcija plohe S na ravninu YZ.

$$S = \iint_{\sigma_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz \qquad (131b)$$

gdje je σ_2 projekcija plohe S na ravninu XZ.

Primjeri

1. Izračunaj površinu S kugle polumjera R.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Računat ćemo prema (131) i (92a i b) površinu gornje polovine kugle, t. j. $\frac{S}{2}$.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{R^2}{z^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Uvrštenje u (131) daje:

$$\frac{S}{2} = R \iint_\sigma \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Prijelaz na polarne koordinate prema (111) daje:

$$\frac{S}{2} = R \iint_\sigma \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \qquad (a)$$

Računamo:

$$\frac{S}{2} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$$

Uz supstituciju $R^2 - \rho^2 = t$ dobijemo:

$$\frac{S}{2} = R \cdot 2\pi \left| -\sqrt{R^2 - \rho^2} \right|_0^R$$

ili

$$\frac{S}{2} = 2R\,\pi\,(0 + R) = 2R^2\pi$$

Odatle

$$\underline{S = 4R^2\pi}$$

2. Izračunaj površinu onog dijela kugle polumjera a, koja leži unutar valjka polumjera $\frac{a}{2}$. Vidi Vivianijev zadatak na str. 241 i slike 116 i 117.

Prema tom zadatku i navedenim slikama imamo obzirom na izraz (a) dobiven u predašnjem primjeru:

$$\frac{S}{4} = a \iint_\sigma \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} =$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| -\sqrt{a^2-\rho^2} \right|_0^{a\cos\varphi} = -a\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin\varphi - a)d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)\,d\varphi = a^2 \left| \varphi + \cos\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$S = 4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

3. U Vivianijevom zadatku izračunaj površinu onog dijela plašta valjka, koji se nalazi u nutrini kugle.

Iz slika 116 i 117 vidimo, da se plašt valjka projicira na ravninu XY kao kružnica OAC, čija je jednadžba

$$x^2 + y^2 = ax$$

Istu jednadžbu ima i valjak.

Područje integracije σ reduciralo se dakle na tu kružnicu, prema kojoj ne možemo odrediti granice integracije. S toga razloga projiciramo četvrtinu tražene površine valjka na ravninu XZ, da uzmemo područje integracije u toj ravnini. Dobijemo područje σ_2, koje je omeđeno koordinatnim osima X i Z, t. j. pravcima $z = 0$ i $x = 0$, i krivuljom ADB jednadžbe $ax + z^2 = a^2$ (sl. 140). Tu jednadžbu dobivamo uklonivši y iz jednadžbi valjka i kugle.

Time što smo područje integracije prenijeli u ravninu XZ, promjenljiva y postala je funkcijom od x i z: $y = f(x, z)$, pa traženu površinu S računamo prema formuli (131b).

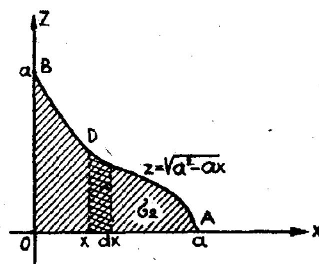
Budući da se traži površina valjka, parcijalne derivacije računamo iz njegove jednadžbe napisavši je u obliku:

$$x^2 + y^2 - ax = 0 \qquad \text{(b)}$$

pa obzirom na formule (92) dobijemo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2x-a}{2y} = \frac{a-2x}{2y} = \text{prema (b)} = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$



Sl. 140

Prema (131b):

$$\frac{S}{4} = \iint_{\sigma_2} \sqrt{1 + \frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}}\,dx\,dz = \frac{a}{2}\iint_{\sigma_2} \frac{dx\,dz}{\sqrt{ax-x^2}}$$

Odatle prema slici 140 imamo:

$$\frac{S}{4} = \frac{a}{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-ax}} dz = \frac{a}{2}\int_0^a \frac{\sqrt{a^2-ax}}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^a \sqrt{\frac{a^2-ax}{ax-x^2}}\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a \sqrt{\frac{a(a-x)}{x(a-x)}}\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a \sqrt{\frac{a}{x}}\,dx =$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{2}\int_0^a x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{a\sqrt{a}}{2}\left|\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^a = a\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a^2$$

$$\underline{S = 4a^2}$$

Izračunaj površinu:

1. kugline plohe $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ zatvorene između ravnina

$x = -8$ i $x = 6$ $[S = 280\,\pi]$

2. onog dijela ravnine $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, koji leži između koordinatnih ravnina.

$$\left[S = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}\right]$$

3. onog dijela paraboloida $y^2 + z^2 = 4ax$, koji odsjeca valjak $y^2 = ax$ i ravnina $x = 3a$.

$$\left[S = \frac{112}{9}\pi a^2\right]$$

4. onog dijela valjka $x^2 + y^2 = 16$, koji se nalazi između ravnine $z = 2x$ i ravnine XY.

$$[S = 128]$$

f) Masa i koordinate težišta ploha

Znajući izračunati površinu S zadane plohe $z = f(x, y)$, možemo lako postaviti formulu za određivanje mase te plohe, ako je ploha pokrivena nekom materijom, bilo homogenom ili nehomogenom.

Pretpostavimo, da je masa zadane plohe $z = f(x, y)$, koja je definirana u području σ ravnine XY, nehomogena. To znači, da se njena gustoća η mijenja od točke do točke, ona je, dakle, funkcija od x i y:

$$\mu = \mu(x, y)$$

Imamo slučaj posve sličan određivanju mase ravnih likova [vidi točku b.)] Uvrštenje formule (130a)' u (123a)

$$dm = \mu(x, y)\cdot dS$$

daje izraz za diferencijal mase nehomogene teške plohe $z = (x, y)$:

$$dm = \mu(x, y)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy \tag{132}$$

a odatle je:

$$m = \iint_\sigma \mu(x, y)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy \tag{132a}$$

masa nehomogene plohe $z = f(x, y)$ gustoće $\mu = \mu(x, y)$.

Ako je ploha homogena, gustoca $\mu =$ konst., pa μ stavimo ispred znaka integrala, dok je za $\mu = 1$, $m = S$.

Primjer

Izračunaj masu oktanta kugline plohe polumjera R, ako je gustoća $\mu = xy$.

Kako je za kuglu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$ (vidi primjer 1. na str. 266),

dobijemo prema (132a):

$$m = R \iint_\sigma \frac{xy\, dx\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

ili nakon prijelaza na polarne koordinate

$$m = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_0^R \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Riješivši posebno i to neodređeno drugi integral pomoću supstitucije $\rho = R \sin t$ dobijemo

$$m = R \left| \frac{\sin^2\varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left| - \frac{(\rho^2 + 2R^2)\sqrt{R^2 - \rho^2}}{3} \right|_0^R =$$

$$= R \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} R^3 = \frac{R^4}{3}$$

Za koordinate težišta plohe lako možemo napisati formule, ako se sjetimo onoga, što smo rekli za koordinate težišta ravnih likova i homogenih rotacionih tijela. [Vidi Dio II, § 7, 2. i 7.e)].

Znamo već, da se koordinate težišta lika dobiju tako, da se njegovi statički momenti podijele s površinom, odnosno masom lika.

Kako se ploha $z = (x, y)$ nalazi u prostoru, statički se momenti plohe ne računaju obzirom na koordinatne osi, već obzirom na sve tri koordinatne ravnine XY, XZ i YZ, pa prema slici 139 koordinate težišta nehomogene plohe $z = f(x, y)$ gustoće $\mu(x, y)$, a definirane u području σ ravnine XY glase:

$$x_t = \frac{M_{yoz}}{m} \quad ; \quad y_t = \frac{M_{xoz}}{m} \quad ; \quad z_t = \frac{M_{xoy}}{m} \tag{133}$$

Tu je m masa plohe, a M_{xoy}, M_{xoz} i M_{yoz} statički momenti plohe obzirom na koordinatne ravnine.

Uzevši u obzir, da je statički moment materijalne točke (elementa plohe) obzirom na neku ravninu jednak umnošku mase te točke i njene udaljenosti od ravnine, dobijemo prema formulama sustava (131) i (132) i slici 139:

$$x_t = \frac{\iint\limits_{\sigma_1} x\,dm}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma_1} x(y, z)\cdot\mu(y, z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz}{\iint\limits_{\sigma_1}\mu(y, z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz}$$

$$y_t = \frac{\iint\limits_{\sigma_2} y\,dm}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma_2} y(x, z)\cdot\mu(x, z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz}{\iint\limits_{\sigma_2}\mu(x, z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz} \tag{134}$$

$$z_t = \frac{\iint\limits_{\sigma_3} z\,dm}{m} = \frac{\iint\limits_{\sigma} z(x, y)\cdot\mu(x, y)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy}{\iint\limits_{\sigma}\mu(x, y)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dv}$$

To su koordinate težišta nehomogene plohe gustoće $\mu(x, y)$.

Ako je ploha homogena, μ = konst., gornje se formule primaju jednostavniji oblik, jer se μ krati.

Primjer

Izračunaj koordinate težišta plohe homogene polukugle $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gustoće μ = konst. $(z \geq 0)$.

Budući da kuglina ploha nastaje rotacijom polukružnice oko osi Z, težište te plohe leži na osi Z, pa je

$$\underline{x_t = 0,} \qquad \underline{y_t = 0}$$

Uzevši u obzir, da je $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ i da je prema predašnjem primjeru

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

dobivamo prema trećoj formuli sustava (134):

$$z_t = \frac{\mu \iint\limits_\sigma \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}}{\mu \iint\limits_\sigma \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}} = \frac{R \iint\limits_\sigma dx\,dy}{2R^2\pi}$$

a nakon prijelaza na polarne koordinate imamo konačno:

$$z_t = \frac{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho d\rho}{2R\pi} = \frac{2\pi R^2}{2R\pi \cdot 2} = \frac{R}{2}$$

g) Masa i koordinate težišta tijela

Pretpostavimo, da je zadano trodimenzionalno nehomogeno tijelo. To znači, da se njegova gustoća μ mijenja od točke do točke, ona je funkcija od x, y i z:

$$\text{gustoća } \mu = \mu(x, y, z)$$

U nekoj točki $T(x, y, z)$ toga tijela nalazi se element volumena $dV = dx\,dy\,dz$ i mase dm. [vidi sl. 141 i formulu (108)]

Kako je za materijalnu točku (element tijela) gustoća $\eta = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$ dobijemo: gustoća u točki $T(x, y, z)$:

$$\mu(x, y, z) = \frac{dm}{dV}$$

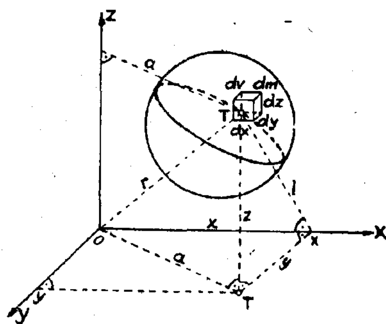
Odatle

$$dm = \mu(x, y, z)dV$$

ili

$$dm = \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \qquad (135)$$

diferencijal mase nehomogenog tijela.



Sl. 141

Da dobijemo masu čitavoga tijela, moramo integrirati po volumenu V toga tijela, t. j. u smjeru koordinatnih osiju X, Y i Z, pa je

$$m = \iiint\limits_V \mu(x, y, z)dx\,dy\,dz \qquad (136)$$

masa nehomogenog tijela.

Za homogeno tijelo (μ = konst.) $m = \mu \cdot V$, a za $\mu = 1$, $m = V$.

Govoreći o materijalnim plohama postavili smo jednadžbe (134) za koordinate težišta tih ploha, pa smo rekli, da je statički moment materijalne točke (elementa tijela) obzirom na neku ravninu jednak umnošku mase te točke i njene udaljenosti od ravnine.

Prema tome obzirom na sliku 141 i formule (135) i (136) dobijemo:

$$x_t = \frac{M_{yoz}}{m} = \frac{\iiint\limits_V x\,dm}{m} = \frac{\iiint\limits_V x\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$y_t = \frac{M_{xoz}}{m} = \frac{\iiint\limits_V y\,dm}{m} = \frac{\iiint\limits_V y\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz} \qquad (137)$$

$$z_t = \frac{M_{xoy}}{m} = \frac{\iiint\limits_V z\,dm}{m} = \frac{\iiint\limits_V z\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.}{\iiint\limits_V \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}$$

koordinate težišta nehomogenog tijela.

Ako je tijelo homogeno, gustoća $\eta =$ konst. se krati.

Primjeri

1. Izračunaj koordinate težišta homogene polukugle $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gustoće $\mu =$ konst. $(z \geqq 0)$.

Težište leži na osi Z, dakle

$$\underline{x_t = 0} \quad \text{i} \quad \underline{y_t = 0}$$

Računamo prema trećoj formuli sustava (137), koja za homogeno tijelo ($\mu =$ konst.) prima oblik

$$z_t = \frac{\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz} = \frac{M_{xoy}}{V} \qquad \text{(a)}$$

Volumen kugle već smo izračunali (vidi str. 249), pa je $V = \frac{2}{3} R^3 \pi$. Računamo M_{xoy}, a kako imamo integrirati po volumenu polukugle, prelazimo na kugline koordinate, pa prema (117) i (118a) imamo:

$$M_{xoy} = \iiint\limits_V \rho \cos \vartheta \cdot \rho^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \int_0^R \rho^3 d\rho = \Big| \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \Big| \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \Big| \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Prema (a):

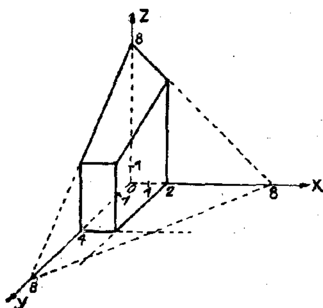
$$z_t = \frac{\pi R^4 \cdot 3}{4 \cdot 2 R^3 \pi} = \underline{\frac{3}{8} R}$$

2. Izračunaj koordinate težišta homogene krnje prizme omeđene ravninama $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 4, x + y + z = 8$.

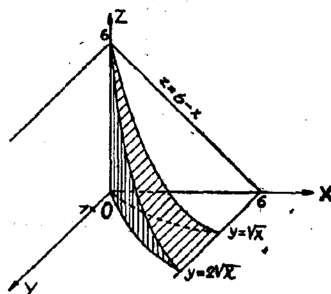
Prema (137) i slici 142:

$$x_t = \frac{\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz} = \frac{\int_0^2 x\,dx\int_0^4 dy\int_0^{8-x-y} dz}{\int_0^2 dx\int_0^4 dy\int_0^{8-x-y} dz} =$$

$$= \frac{\int_0^2 x\,dx\int_0^4 (8-x-y)dy}{\int_0^2 dx\int_0^4 (8-x-y)dy} = \frac{\int_0^2 x\,dx\left|8y-xy-\frac{y^2}{2}\right|_0^4}{\int_0^2 dx\left|8y-xy-\frac{y^2}{2}\right|_0^4} =$$



Sl. 142



Sl. 143

$$= \frac{\int_0^2 (32x - 4x^2 - 8x)dx}{\int_0^2 (32 - 4x - 8)dx} = \frac{\left|12x^2 - \frac{4}{3}x^3\right|_0^2}{\left|24x - 2x^2\right|_0^2} = \underline{\frac{14}{15}}$$

Na isti način dobijemo prema (137):

$$\underline{y_t = \frac{26}{15}} \quad ; \quad \underline{z_t = \frac{8}{3}}$$

Izračunaj to!

3. Izračunaj koordinate težišta homogenog tijela omeđenog s

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 0, \quad x + z = 6 \qquad (y \geq 0).$$

Prema (137) i slici 143:

$$x_t = \frac{\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V dx\,dy\,dz} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^6 x\cdot dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{6-x} dz}{\int\limits_0^6 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{6-x} dz} = \frac{\int\limits_0^6 x(6-x)dx \; \Big| \, y \, \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}}{\int\limits_0^6 (6-x)dx \; \Big| \, y \, \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}} = \frac{\int\limits_0^6 (6x - x^2)\sqrt{x}\cdot dx}{\int\limits_0^6 (6-x)\sqrt{x}\cdot dx}$$

$$= \left| \frac{\dfrac{6x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}}{\dfrac{6x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}} \right|_0^6 = \left| \frac{(42x - 5x^2)15}{35(30-3x)} \right|_0^6 = \frac{(7\cdot 6^2 - 5\cdot 6^2)15}{35\cdot 12} =$$

$$= \frac{36\cdot 2\cdot 15}{35\cdot 12} = \underline{\frac{18}{7}}$$

Na isti način dobijemo prema (137):

$$\underline{y_t = \frac{15}{16}\sqrt{6}} \quad ; \quad \underline{z_t = \frac{12}{7}} \qquad \text{Izračunaj to!}$$

Odredi koordinate težišta slijedećih homogenih tijela:

1. Kuglina isječka, ako je R polumjer kugle, a 2α središnji kut osnog presjeka.

$$\left[z_t = \frac{3}{4} R \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right]$$

2. Tijela omeđenog s $2x + 3y - 12 = 0$, $z = \frac{1}{2}y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$$\left[x_t = \frac{6}{5} \;;\; y_t = \frac{12}{5} \;;\; z_t = \frac{8}{5} \right]$$

h) Momenti tromosti (inercije) tijela

Znamo već, da se pod aksijalnim momentom tromosti ili inercije materijalne točke obzirom na zadanu os rotacije razumije umnožak mase m te točke i kvadrata njene udaljenosti od osi rotacije. Slično se definiraju momenti tromosti obzirom na točku — polarni momenti tromosti, i obzirom na ravninu — planarni momenti tromosti (vidi Dio II. § 7, 3).

Prema tome uzmemo li u nekoj točki $T(x, y, z)$ trodimenzionalnog nehomogenog tijela gustoće $\mu = \mu(x, y, z)$ element toga tijela mase dm, tada će momenti tromosti za taj element glasiti prema slici 141:

Aksijalni moment tromosti obzirom na os X:

$$dI_x = l^2 \cdot dm$$

a kako je $l^2 = y^2 + z^2$, a prema (135)

$$dm = \mu(x, y, z)dV = \mu(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

bit će

$$dI_x = (y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

Analogno dobijemo momente tromosti obzirom na osi Y i Z:

$$dI_y = (x^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$dI_z = (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

Da dobijemo aksijalne momente tromosti za čitavo tijelo, moramo integrirati po volumenu V tijela:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint\limits_V (y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ I_y &= \iiint\limits_V (x^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ I_z &= \iiint\limits_V (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \end{aligned} \tag{138}$$

To su aksijalni momenti tromosti nehomogenog tijela obzirom na koordinatne osi.

Na isti način dobijemo prema slici 141:

polarni moment tromosti obzirom na ishodište O koordinatnog sustava:

$$I_p = I_o = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{139}$$

i planarne momente tromosti obzirom na koordinatne ravnine:

$$\begin{aligned} I_{xoy} &= \iiint\limits_V z^2 \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ I_{xoz} &= \iiint\limits_V y^2 \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ I_{yoz} &= \iiint\limits_V x^2 \cdot \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \end{aligned} \tag{140}$$

Ako je tijelo homogeno, gustoća $\mu =$ konst. stavi se ispred znaka integrala, a za $\mu = 1$ dobijemo t. zv. geometrijske momente tromosti.

Rastavimo li svaku formulu sustava (138) u dva integrala, dobit ćemo obzirom na formule (140):

$$\begin{aligned} I_x &= I_{xoz} + I_{xoy} \\ I_y &= I_{yoz} + I_{xoy} \\ I_z &= I_{yoz} + I_{xoz} \end{aligned} \tag{141}$$

a rastavljanje formule (139) u tri integrala daje obzirom na formule (140):

$$I_o = I_{yoz} + I_{xoz} + I_{xoy} \tag{142}$$

Konačno zbroj formula (141) daje obzirom na (142)

$$I_x + I_y + I_o = 2I_o$$

ili

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \tag{143}$$

Spomenimo još na kraju, da se i za tijelo računaju centrifugalni momenti

$$I_{xy} = \int_V xydm, \quad I_{xz} = \int_V xzdm \quad \text{i} \quad I_{yz} = \int_V yzdm,$$

pri čemu se koordinatne osi X, Y i Z zovu glavne osi tromosti tijela, ako su sva tri centrifugalna momenta, uzeta obzirom na taj pravokutni koordinatni sistem, jednaka nuli, a I_x, I_y i I_z su tada glavni momenti tromosti.

Pomoću navedenih formula možemo izračunati momente tromosti bilo kojeg homogenog i nehomogenog tijela. Međutim, ako je tijelo rotaciono i homogeno, njegove momente tromosti računamo mnogo jednostavnije pomoću jednostrukih integrala, kako je to pokazano u dijelu II. Repetitorija (§ 7, 7.).

Pojam momenta tromosti ima veliku primjenu u mnogim područjima nauke i tehnike, na pr. u mehanici i čvrstoći.

Tako u mehanici postoji uska veza između momenta tromosti tijela, koje rotira, obzirom na os vrtnje, i kinetičke energije toga tijela.

Neka se neko nehomogeno tijelo gustoće $\mu = \mu(x, y, z)$ i volumena V okreće oko osi Z koordinatnog sustava sa stalnom kutnom brzinom ω. Znamo, da je kinetička energija materijalne točke:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \tag{a}$$

gdje je m — masa točke, a v — njena obodna brzina. Uzevši u obzir, da je obodna brzina $v =$ polumjer rotacije puta kutna brzina $= a \cdot \omega =$ prema slici 141 $= \omega \sqrt{x^2 + y^2}$, dobijemo prema (a) za element tijela mase dm i volumen $dV = dx\, dy\, dz$:

$$dE_z = \frac{1}{2} dm\, \omega^2 (x^2 + y^2)$$

a kako je $dm = \mu(x, y, z)dx\, dy\, dz$

$$dE_z = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y, z)dx\, dy\, dz$$

a odatle

$$E_z = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_V (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y, z)dx\, dy\, dz$$

ili prema (138):

$$E_z = \frac{1}{2} \omega^2\, I_z$$

Kinetička energija tijela, koje se okreće oko neke osi sa stalnom kutnom brzinom, jednaka je umnošku polovine kvadrata kutne brzine i momenta tromosti tijela obzirom na os rotacije.

U čvrstoći računaju se poglavito momenti tromosti poprečnih presjeka nosača, dakle geometrijski momenti tromosti, t. j. momenti tromosti ravnih likova gustoće $\mu = 1$. Tako, na pr., normalno naprezanje σ u poprečnom presjeku opterećenog nosača u udaljenosti y od osi X računa se po formuli

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}$$

gdje je M — moment savijanja u dotičnom poprečnom presjeku nosača, a I_x — moment tromosti istog presjeka. Međusobno okomite osi X i Y, koje se sijeku u težištu poprečnog presjeka, jesu glavne osi tromosti toga presjeka, ako je centrifugalni moment $I_{xy} = 0$.

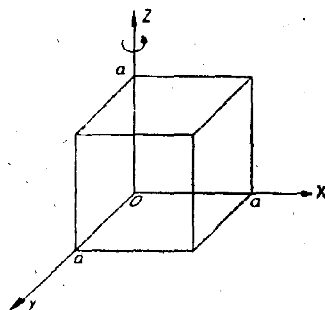
Primjeri

1. Izračunaj moment tromosti homogene kocke gustoće μ = konst. i brida a obzirom na os Z (sl. 144).

Prema (138) imamo:

$$I_z = \mu \iiint_V (x^2 + y^2)dx\, dy\, dz =$$

$$= \mu \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2)dy \int_0^a dz =$$



Sl. 144

$$= \mu a \int_0^a dx \left| x^2 y + \frac{y^3}{3} \right|_0^a = \mu a \int_0^a \left(a x^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx =$$

$$= \mu a^2 \left| \frac{x^3}{3} + \frac{a^2}{3} x \right|_0^a = \mu a^2 \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \mu a^5 = \frac{2}{3} \mu a^3 \cdot a^2 = \underline{\frac{2}{3} m a^2}$$

gdje je $m = \mu a^3$ masa kocke.

2. Izračunaj momente tromosti za pravokutni paralelopiped bridova a, b, c i **gustoće** $\mu =$ konst., i to obzirom na osi simetrije, težište i koordinatne ravnine (sl. 145).

Prema (138):

$$I_x = \mu \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dx\, dy\, dz = \mu \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (y^2 + z^2) dz =$$

Sl. 145

$$= \mu \left| x \right|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \left| y^2 z + \frac{z^3}{3} \right|_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} =$$

$$= \mu a \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \left(y^2 \frac{c}{2} + \frac{c^3}{24} + y^2 \frac{c}{2} + \frac{c^3}{24} \right) =$$

$$= \mu ac \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(y^2 + \frac{c^2}{12} \right) dy = \mu ac \left| \frac{y^3}{3} + \frac{c^2}{12} y \right|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} =$$

$$= \mu ac \frac{b^3 + bc^2}{12} = \frac{1}{12} \mu abc (b^2 + c^2) = \underline{\frac{1}{12} m (b^2 + c^2)}$$

gdje je m — masa paralelopipeda.

Na isti način dobijemo

$$\underline{I_y = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)} \quad ; \quad \underline{I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)}$$

Izračunaj to!

Prema (143):

$$I_o = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z) = \underline{\frac{1}{12} m (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Prema (140):

$$I_{xoy} = \mu \iiint\limits_V z^2\, dx\, dy\, dz = \mu \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} z^2\, dz =$$

$$= \mu\, a\, b \frac{c^3}{12} = \underline{\frac{1}{12} m c^2}$$

Na isti način:

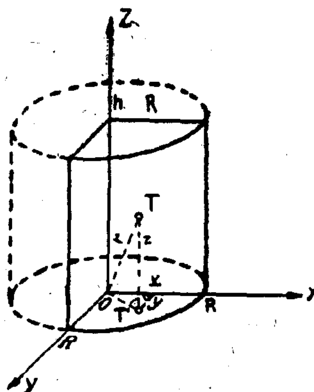
$$\underline{I_{xoz} = \frac{1}{12} m b^2} \quad ; \quad \underline{I_{yoz} = \frac{1}{12} m a^2}$$

Kontrola prema (142):

$$\frac{1}{12} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{12} m c^2 =$$

$$= \frac{1}{12} m (a^2 + b^2 + c^2) = I_o$$

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, jer su koordinatne ravnine ravnine simetrije za zadani paralelopiped, pa su X, Y i Z glavne osi tromosti.



Sl. 146

3. Izračunaj masu, težište i moment tromosti obzirom na os simetrije nehomogenog kružnog uspravnog valjka polumjera osnovke R i visine h, ako je gustoća u svakoj točki numerički jednak kvadratu udaljenosti te točke od ishodišta koordinatnog sustava (sl. 146).

Prema slici i zadatku

gustoća $\mu = r^2 = z^2 + OT'^2 = z^2 + x^2 + y^2$, pa prema (136) imamo

$$m = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

Budući da integriramo po volumenu valjka, prelazimo na cilindričke koordinate, pa prema (116) imamo:

$$m = \iiint_V (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^h (\rho^2 + z^2)\, dz = 2\pi \int_0^R \rho\, d\rho \left| \rho^2 z + \frac{z^3}{3} \right|_0^h =$$

$$= 2\pi h \int_0^R \left(\rho^3 + \frac{h^2}{3} \rho \right) d\rho = 2\pi h \left| \frac{\rho^4}{4} + \frac{h^2}{3} \frac{\rho^2}{2} \right|_0^R = \underline{\frac{\pi}{6} h R^2 (3R^2 + 2h^2)}$$

Prema (137):

$$z_t = \frac{M_{xoy}}{m} = \frac{\iiint_V z (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz}{m}$$

Opet prelazimo na cilindričke koordinate:

$$M_{xoy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^h (\rho^2 + z^2)\, z\, dz = 2\pi \int_0^R \rho\, d\rho \left| \frac{\rho^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right|_0^h =$$

$$= 2\pi h^2 \int_0^R \left(\frac{\rho^3}{2} + \frac{h^2}{4}\rho\right) d\rho = 2\pi h^2 \left|\frac{\rho^4}{8} + \frac{h^2}{4}\cdot\frac{\rho^2}{2}\right|_0^R = \frac{\pi}{4} h^2 R^2 (R^2 + h^2)$$

$$z_t = \frac{M_{xoy}}{m} = \frac{3}{2}\,\frac{h(R^2 + h^2)}{3R^2 + 2h^2}$$

$x_t = 0$; $y_t = 0$ Dokaži to!

Prema (138):

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

a nakon prijelaza na cilindrične koordinate

$$I_z = \iiint_V \rho^2(\rho^2 + z^2)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3\,d\rho \int_0^h (\rho^2 + z^2)\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^R \rho^3\,d\rho \left|\rho^2 z + \frac{z^3}{3}\right|_0^h = 2\pi h \int_0^R \left(\rho^5 + \frac{h^2}{3}\rho^3\right) d\rho =$$

$$= 2\pi h \left|\frac{\rho^6}{6} + \frac{h^2}{3}\cdot\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R = \frac{1}{6}\pi h R^4 (2R^2 + h^2)$$

Izračunaj:

1. Momente tromosti pravokutnog paralelopipeda gustoće μ = const., ako se osi X, Y i Z podudaraju s bridovima a, b i c paralelopipeda, i to obzirom na te osi, obzirom na ishodište O i obzirom na koordinatne ravnine uz kontrolu rezultata prema (142).

$$\left[I_x = \frac{1}{3} m (b^2 + c^2) \text{ i t. d.} \right]$$

2. Moment tromosti uspravnog kružnog valjka gustoće μ = const. obzirom na os, koja se podudara s promjerom njegova srednjeg presjeka, ako je h visina valjka, a R polumjer osnovke.

$$\left[I_z = \frac{1}{12} m (h^2 + 3R^2) \right]$$

3. Moment tromosti uspravne kvadratične piramide stranice osnovke a i visine h, koja rotira oko svoje visine h (μ = const.).

$$\left[I_z = \mu \frac{a^4 h}{30} = m \frac{a^2}{10} \right]$$

§ 6. INTEGRALI, KOJI OVISE O PARAMETRU. NJIHOVO DERIVIRANJE I INTEGRIRANJE PO PARAMETRU

1. Pojam parametra integrala

Pod parametrom integrala razumije se ona promjenljiva veličina, o kojoj ovisi podintegralna funkcija ili također granice integrala, dok parametar sam ne zavisi od promjenljive integrala.

Iz te definicije vidimo, da mogu biti dva slučaja:

1) samo podintegralna funkcija ovisi o parametru, koji označimo s α, dok su granice integracije konstantne:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

Jasno je, da vrijednost integrala ovisi o parametru α, pa smo je označili s $F(\alpha)$.

2) Granice integracije nisu konstantne, već su također funkcije parametra α:

$$F(\alpha) = \int_{b(\alpha)}^{a(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx$$

Naš je zadatak, da pokažemo, kako se derivira, odnosno integrira po parametru α integral, koji ovisi o parametru.

2. Deriviranje integrala po parametru

a) Granice integracije su konstantne, na pr. a i b.

U tom slučaju derivacija integrala po parametru α jednaka je integralu derivacije podintegralne funkcije po tom parametru α, ako su podintegralna funkcija i njena parcijalna derivacija po parametru α neprekinute u intervalu integracije $[a, b]$.

To znači:

za $$F(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

$$F'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx \qquad (144)$$

Kako vidimo, deriviranje funkcije $F(\alpha)$ po α svodi se na deriviranje pod znakom integrala. To je Leibnizovo pravilo.

Primijetimo, da ulogu parametra α može igrati i y.

Uvrštenje $\alpha = y$ u (144) daje:

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \tag{144a}$$

y je parametar.

x također može imati značenje parametra:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy \tag{144b}$$

x je parametar.

Primjer

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 ln\,(x^2 + y^2)\,dx =$$

Kako su podintegralna funkcija i njena parcijalna derivacija po y neprekinute u granicama integracije i za $y > 0$, t. j. u području $0 \leqq x \leqq 1$ i $y > 0$, imamo prema (144a):

$$= \int_0^1 \frac{\partial ln\,(x^2 + y^2)}{\partial y}\,dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2}\,dx =$$

= integriramo po x, parametar y ne ovisi o x =

$$= \left| 2y \cdot \frac{1}{y}\,arc\,tg\,\frac{x}{y} \right|_0^1 = \underline{2\,arc\,tg\,\frac{1}{y}}$$

b) Granice integracije a i b su funkcije parametra α, t. j. $a = a(\alpha)$ i $b = b(\alpha)$.

$$F(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\,dx$$

F je sada funkcija ne samo od α, već i od $a(\alpha)$ i $b(\alpha)$, t. j. F je složena funkcija od α:

$$F = \rho\,[\alpha,\ a(\alpha),\ b(\alpha)]$$

Derivirajmo F po pravilu za deriviranje složenih funkcija, t. j. prema (87):

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial a}\cdot\frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial b}\cdot\frac{db}{d\alpha} \tag{a}$$

Prvi član desne strane

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \text{prema (144)} = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx$$

Dalje

$$\frac{\partial P}{\partial a} = -f(a,\alpha) \qquad \frac{\partial P}{\partial b} = +f(b,\alpha)$$

prema pravilu za deriviranje integrala po donjoj, odnosno gornjoj granici (vidi Dio II, § 6).

Uvrštenje u (a) daje:

$$\frac{dP}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\, dx = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha} \qquad (145)$$

Faktori $f(b,\alpha)$ i $f(a,\alpha)$ u posljednjim članovima formule (145) jesu funkcije samo parametra α, jer se dobiju tako, da se u podintegralnoj funkciji f zamijeni x s $b(\alpha)$, odnosno s $a(\alpha)$.

Značenje parametra α može imati y. Zamijenimo li u (145) α s y dobijemo:

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx + f(b,y)\frac{db}{dy} - f(a,y)\frac{da}{dy} \qquad (145a)$$

y je parametar.

Isto tako i x može imati značenje parametra:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\, dy = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy + f(b,x)\frac{db}{dx} - f(a,x)\frac{da}{dx} \qquad (145b)$$

x je parametar.

Primjeri

1. $$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \sin(x\cdot y)\, dy = \text{prema (145b)} = \int\limits_0^x y\cos(x\cdot y)\, dy +$$

$$+ \sin(x^2)\frac{dx}{dx} - \sin(x\cdot 0)\frac{d0}{dx} = \left|\frac{y\sin(x\cdot y)}{x}\right|_0^x - \int\limits_0^x \frac{\sin(x\cdot y)}{x}\, dy + \sin(x^2) =$$

$$= x\frac{\sin x^2}{x} + \left|\frac{\cos(x\cdot y)}{x^2}\right|_0^x + \sin x^2 = \underline{2\sin(x^2) + \frac{\cos(x^2)}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

2. $$\frac{d}{dy}\int\limits_{\sin(2y-3)+3y}^{4y^2-5y+2}(x^2y-3xy^2+4y+5x)\,dx = \text{prema (145a)} =$$

$$= \int\limits_{\sin(2y-3)+3y}^{4y^2-5y+2}(x^2-6xy+4)dx + [(4y^2-5y+2)^2y-3(4y^2-5y+2)y^2+$$

$$+4y+5(4y^2-5y+2)](8y-5)-\{[\sin(2y-3)+3y]^2y-$$

$$-3[\sin(2y-3)+3y]y^2+4y+5[\sin(2y-3)+3y]\}\cdot[2\cos(2y-3)+3]=$$

$$=\left|\frac{x^3}{3}-3x^2y+4x\right|_{\sin(2y-3)+3y}^{4y^2-5y+2}+f(y)=$$

= gdje su s $f(y)$ označeni svi članovi iza integrala =

$$=\Big\{\frac{1}{3}(4y^2-5y+2)^3-3(4y^2-5y+2)^2y+4(4y^2-5y+2)-$$

$$-\frac{1}{3}[\sin(2y-3)+3y]^3-3[\sin(2y-3)+3y]^2y+$$

$$+4[\sin(2y-3)+3y]\Big\}+f(y)$$

Uredi rezultat!

Leibnizovo pravilo za deriviranje pod znakom integrala primijenjuje se za računanje složenih određenih integrala.

Navedimo primjer.

Treba izračunati

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^2}$$

Izračunajmo najprije

$$F(a,b)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$$

Podijelivši brojnik i nazivnik integranda s $\cos^2x$ i uzevši supstituciju $tg\,x = t$ (vidi Dio II, primjedba kod tipa VI.), dobijemo nakon integriranja i povratka na prvobitnu promjenljivu x:

$$F(a,b)=\frac{1}{ab}\left|arc\,tg\left(\frac{b}{a}\,tg\,x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{ab}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2ab}$$

Dakle:

$$F(a,b)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\frac{\pi}{2ab} \qquad \text{(a)}$$

Smatrajući a parametrom derivirajmo (a) po a:

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=-\frac{\pi}{2a^2 b}$$

Ili prema (144):

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2a\cos^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}=-\frac{\pi}{2a^2 b}\,\Big|:-2a$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}=\frac{\pi}{4.a^3 b} \qquad \text{(b)}$$

Sada smatramo, da je b parametar, pa (a) deriviramo po b prema (144):

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial b}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2b\sin^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}=-\frac{\pi}{2ab^2}\,\Big|:-2b$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}=\frac{\pi}{4ab^3} \qquad \text{(c)}$$

Načinivši (b) + (c) dobijemo zadani integral riješen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}=\underline{\frac{\pi}{4ab}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$$

Deriviranje pod znakom integrala primijenjuje se često u tehničkim naukama, na pr. u nauci o čvrstoći pri računanju statički neodređenih sistema po Castiglianovom teoremu, koji kaže:

Ako je E_p potencijalna energija deformiranog nosača, tada je

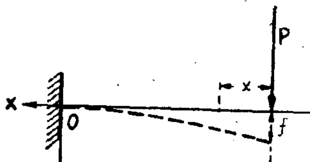
1. $\dfrac{\partial E_p}{\partial P}=f=$ put hvatišta vanjske sile P (tereta), t. j. progib nosača ispod sile P.

2. $\dfrac{\partial E_p}{\partial S}=0$, gdje je S statički neodređena nutarnja sila (naprezanje) ili reakcija nepomičnog ležaja.

Budući da je potencijalna energija deformiranog nosača obično zadana u obliku integrala, primjena Castiglianova teorema traži deriviranje pod znakom integrala.

Kako računanje statički neodređenog sistema pretpostavlja opširno znanje čvrstoće, odredimo po Castiglianu, kao primjer, samo progib f na kraju konzolnog nosača opterećenog silom P (sl. 147).

Potencijalna energija E_p savinutog nosača glasi:



Sl. 147

$$E_p = \frac{1}{2EI}\int_a^b M_x^2\, dx \qquad (a)$$

Tu je

E — modul elasticiteta materijala, od kojega je napravljen nosač,

I — moment tromosti poprečnog presjeka nosača obzirom na os savijanja,

M_x — moment savijanja u udaljenosti x.

Prema prvom stavku teorema računamo progib f na kraju grede, t. j. ispod sile P:

$$f = \frac{\partial E_p}{\partial P} = \text{prema } (a) \text{ i } (144) = \frac{1}{2EI}\int_a^b \frac{\partial M_x^2}{\partial P}\, dx \qquad (b)$$

Za naš slučaj prema slici 147 imamo

$$M_x = P \cdot x$$

odnosno

$$M_x^2 = P^2 x^2 \qquad (c)$$

dok je $a = 0$ i $b = l$ (duljina nosača).

Uvrštenje (c) u (b) daje traženi progib f zadanog nosača:

$$f = \frac{1}{2EI}\int_0^l \frac{\partial (P^2 x^2)}{\partial P}\, dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l 2P\, x^2\, dx = \frac{P}{EI}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^l = \underline{\frac{P\, l^3}{3\, EI}}$$

Izračunaj

1. $$\frac{d}{dx}\int_{3x^2 - 5\cos x + 2}^{5x + 2\sin x} (xy + y^3 - 4x^2 + 2x - 3y + 7)\, dy$$

2. $$\int_0^x \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad \text{polazeći od} \quad \int_0^x \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$\left[\frac{1}{2a\sqrt{a}}\, arc\, tg \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2a}\, \frac{x}{x^2 + a}\right]$$

3. Integriranje integrala po parametru

Neka je zadan integral, koji ovisi o parametru α:

$$F(\alpha) = \int_a^b f\,(x, \alpha)\, dx$$

pri čemu pretpostavimo, da su granice integracije a i b konstantne.

Tražimo integral toga integrala po parametru α i to od α_1 do α_2 t. j. tražimo

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha)\,d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Big[\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\Big]\,d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

Dobili smo dvostruki integral uzet po području ravnine αOX. Prema poznatom svojstvu dvostrukih integrala, možemo promijeniti redoslijed integriranja, t. j. najprije integrirati po parametru α, a zatim po x.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha \tag{146}$$

To znači: Integral po parametru α integrala s konstantnim granicama integracije jednak je integralu, koji ima zadane konstantne granice integracije, a kao podintegralnu funkciju zadani integral s parametarskim granicama integracije.

Kako vidimo, to je pravilo slično Leibnizovom pravilu o deriviranju pod znakom integrala, pa možemo općenito kazati:

Da se derivira ili integrira po parametru integral s konstantnim granicama integracije, potrebno je primijeniti te operacije na podintegralnu funkciju.

Integriranjem pod znakom integrala, kao i deriviranjem, služimo se za izračunavanje nepravih integrala, kad drugi načini ne vode cilju. Na pr. na taj se način dokazuje, da je

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

§ 7. EGZAKTNI DIFERENCIJALI I NJIHOVO INTEGRIRANJE

1. Treba riješiti pitanje: uz koji uvjet predočuje linearni diferencijalni izraz

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

gdje su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekinute funkcije s neprekinutim parcijalnim derivacijama u nekom području ravnine XY, totalni diferencijal neke funkcije $u = u(x, y)$ i kakva je ta funkcija u?

Ako postoji takva funkcija $u = u(x, y)$, za koji je $Pdx + Qdy = du$, tada se izraz $Pdx + Qdy$ zove egzaktni diferencijal.

Pretpostavimo, da je $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ egzaktni diferencijal, t. j. totalni diferencijal neke funkcije $u = u(x, y)$:

$$P\,dx + Q\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Iz te jednadžbe slijedi:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{i} \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{a}$$

Derivirajući prvu jednakost po y, a drugu po x, dobijemo:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Kako je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

imamo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{b}$$

To je **nužni** uvjet, da izraz $Pdx + Qdy$ predočuje totalni diferencijal neke funkcije od (x, y). To znači: ako je diferencijalni izraz $Pdx + Qdy$ totalni diferencijal neke funkcije $u = u(x, y)$, tada funkcije P i Q zadovoljavaju uvjet (b), ili, ako funkcije P i Q taj uvjet ne zadovoljavaju, tada ne postoji funkcije, čiji bi totalni diferencijal bio $Pdx + Qdy$.

Pokažimo sada, da je taj uvjet i dovoljan, t. j. dokažimo:

ako je uvjet $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ispunjen, tada diferencijalni izraz $Pdx + Qdy$ predočuje totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y)$. Dokaz provedimo tako, da uz pretpostavku uvjeta $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ izvedemo funkciju $u(x, y)$ takvu, da je $du = Pdx + Qdy$.

Iz (a) vidimo, da tražena funkcija $u(x, y)$ mora zadovoljavati jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \tag{c}$$

Ako postoji bar jedna takva funkcija $u(x, y)$, koja zadovoljava te jednadžbe, tada postoji beskonačno mnogo takvih funkcija, koje se međusobno razlikuju samo za konstantu, jer bi ta konstanta otpala pri deriviranju tih funkcija po x i po y. Odredimo onu funkciju $u(x, y)$, koja bi u nekoj unaprijed zadanoj točki, na pr. točki (x_0, y_0), bila jednaka nuli.

Iz prve jednadžbe (c) slijedi, da je

$$\partial u = P(x, y)\, \partial x$$

Smatramo li y nekim parametrom, tu jednakost možemo napisati u obliku:

$$du = P(x, y)dx$$

Integrirajmo sada taj izraz po x od x_0 do x uz čvrsti parametar y:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \varphi(y) \tag{d}$$

gdje je $\varphi(y)$ kakvagod funkcija od y, koja ima derivaciju $\varphi'(y)$.

Vidimo, da smo mjesto konstante integracije, dobili bilo koju funkciju φ parametra y, jer ta funkcija otpada pri parcijalnom deriviranju u po x, budući da je konstanta obzirom na x.

Funkciju $\varphi(y)$ odredimo iz (d) tako, da taj integral deriviramo po **Leibnizovu** pravilu po parametru y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} = \text{prema (144a)} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \frac{d\varphi(y)}{dy},$$

a kako je prema (c) $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, a prema (b) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, dobijemo odatle

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

Računajući $\frac{\partial Q}{\partial x}$ smatramo, da je $y = \text{const.}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ je dakle funkcija od samoga x, a budući da su integriranje i deriviranje inverzne operacije, dobijemo:

$$Q(x,y) = \Big| Q(x,y) \Big|_{x_0}^{x} + \frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

Odatle

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x_0,y)$$

ili

$$d\varphi(y) = Q(x_0,y)\,dy$$

Integriramo od y_0 do y, dodavši konstantu integracije C:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + C,$$

Uvrštenje u (d) daje traženu primitivnu funkciju:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + C \qquad \text{(e)}$$

Tu su x_0, y_0 konstante po volji. Njihove vrijednosti odabiramo tako, da integriranje bude što jednostavnije, s toga se razloga obično uzima $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$.

Time smo dokazali, da je uvjet $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nije samo nuždan, već i dovoljan, pa možemo zaključiti:

Da linearni diferencijalni izraz $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ predočuje totalni diferencijal du neke funkcije $u = u(x, y)$, t. j. da bude egzaktni diferencijal, nužno je i dovoljno, da funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ zadovoljavaju uvjet:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ili} \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{147}$$

Taj uvjet zove se uvjet integrabilnosti za diferencijalni izraz $Pdx + Qdy$, jer samo uz taj uvjet možemo izračunati

$$\int Pdx + Qdy$$

Obzirom na (e) imamo u tom slučaju:

$$\int P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int du(x, y) = u(x, y) =$$
$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C \tag{148}$$

gdje su x_0 i y_0 neke konstante.

Primjeri

Pokaži, da su diferencijalni izrazi, koji slijede, egzaktni diferencijali i izračunaj pripadne primitivne funkcije:

1. $\underbrace{(20x^3 - 21x^2y + 2y)}_{P}\,dx + \underbrace{(-7x^3 + 2x + 3)}_{Q}\,dy$

Prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -21x^2 + 2 - (-21x^2 + 2) = 0$$

Zadani izraz je egzaktni diferencijal!

Prema (148):

$$u(x, y) = \int (20x^3 - 21x^2y + 2y)\,dx + (-7x^3 + 2x + 3)\,dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} (20x^3 - 21x^2y + 2y)\,dx + \int_{y_0}^{y} (-7x_0^3 + 2x_0 + 3)\,dy + C =$$

pri računanju prvog integrala je $y = \text{const.}$, jer integriramo samo po x, također su x_0 i y_0 konstante

$$= \left| 5x^4 - y \cdot 7x^3 + 2yx \right|_{x_0}^{x} +$$

$$+ \left| -7x_0^3y + 2x_0y + 3y \right|_{y_0}^{y} + C = 5x^4 - 7x^3y + 2xy - 5x_0^4 + 7x_0^3y - 2x_0y -$$

$$- 7x_0^3y + 2x_0y + 3y + 7x_0^3y_0 - 2x_0y_0 - 3y_0 + C = 5x^4 - 7x^3y + 2xy + 3y -$$

$$\underbrace{- 5x_0^4 + 7x_0^3y_0 - 2x_0y_0 - 3y_0 + C}_{C_1} = \underline{5x^4 - 7x^3y + 2xy + 3y + C_1}$$

Važna primjedba

Iz našeg primjera vidimo, da se nakon uvrštenja granica integracije u rezultatu ukidaju svi miješani članovi, t. j. članovi, koji se sastoje od faktora s x_0 i y bez indeksa, dok su članovi s x_0 i y_0 konstante pa ih spajamo sa C u jednu konstantu C_1. Odatle slijedi jednostavno pravilo za integriranje egzaktnog diferencijala prema formuli (148):

granice integracije se ne uvrštavaju, a pri računanju drugog integrala izostavljaju se svi članovi s x_0.

To pravilo odgovara u mnogim slučajevima vrijednostima $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$. Riješimo sada naš primjer prema tom jednostavnom pravilu:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} (20x^3 - 21x^2y + 2y)\, dx + \int_{y_0}^{y} (-7x_0^3 + 2x_0 + 3)\, dy + C =$$

$$\underline{= 5x^4 - 7x^3y + 2xy + 3y + C}$$

2. $$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Napisavši taj izraz u obliku

$$\underbrace{-\frac{y}{x^2 + y^2}}_{P} dx + \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{Q} dy$$

Računamo prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{(x^2 + y^2) \cdot 1 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 1 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, dakle zadani je izraz egzaktni diferencijal.

Prema (148):

$$u(x, y) = \int -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = -\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y}{x^2+y^2}dx +$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y} \frac{x_0}{x_0^2+y^2}dy + C = -\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y}{x^2+y^2}dx + 0 + C =$$

$$= -y\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2+y^2} + C = -y \cdot \frac{1}{y} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + C = \underline{-\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + C}$$

3.

$$\underset{Q}{x}\,dy - \underset{P}{y}\,dx$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ — zadani diferencijalni izraz nije egzaktni diferencijal, pa nema funkcije $u(x, y)$, čiji bi totalni diferencijal du bio jednak zadanom izrazu $x\,dy - y\,dx$.

2. Funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, koje ulaze u gore promatrani diferencijalni izraz, funkcije su dviju nezavisnih promjenljivih x i y, pa su definirane u nekom području ravnine XY. To je dakle slučaj funkcija definiranih u ravnini.

Uzmimo sada slučaj, kada zadani linearni diferencijalni izraz ima oblik

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

gdje su P, Q i R neprekinute funkcije s neprekinutim parcijalnim derivacijama. Sada imamo slučaj funkcija definiranih u prostoru, jer su sve tri funkcije P, Q i R funkcije triju nezavisnih promjenljivih, pa su definirane u nekom trodimenzionalnom području.

Treba riješiti slični zadatak kao pod 1.: tražimo uvjete, kojima moraju zadovoljavati funkcije P, Q i R, da zadani linearni diferencijalni izraz bude totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y, z)$, t. j. bude egzaktni diferencijal, i odredimo tu funkciju $u(x, y, z)$.

Opet pretpostavimo, da je $Pdx + Qdy + Rdz$ egzaktni diferencijal, t. j.

$$Pdx + Q\,dy + R\,dz = d\,u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Odatle slijedi:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ pa } P \text{ derivirajmo po } y \text{ i } z,$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ pa } Q \text{ derivirajmo po } x \text{ i } z,$$

$$R = \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ pa } R \text{ derivirajmo po } x \text{ i } y.$$

Dobijemo:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$$

Iz tih jednakosti slijedi:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

ili

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \qquad (149)$$

To je nužni uvjet, da je $Pdx + Qdy + Rdz$ egzaktni diferencijal.

Vidimo, da su se uvjetu slučaja u ravnini pridružila sada još dva uvjeta.

Može se pokazati na način slični onome kod slučaja u ravnini, da je taj uvjet dovoljan i da je u tom slučaju

$$\int P\,(x, y, z)\,dx + Q\,(x, y, z)\,dy + R\,(x, y, z)\,dz = \int du = u\,(x, y, z) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P\,(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q\,(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R\,(x_0, y_0, z)\,dz + C \qquad (150)$$

gdje su x_0, y_0 i z_0 bilo koje konstante.

Pri integriranju pridržavat ćemo se istog pravila, koje smo postavili za ravni slučaj:

Granice integracije ne uvrštavamo, a pri računanju drugog i trećeg integrala izostavljamo mješane članove, t. j. članove, koji sadrže x_0, y i z odnosno x_0, y_0 i z.

Uvjet (149) je uvjet integrabilnosti za prostorni slučaj.

Primjeri

Pokaži, da su linearni diferencijalni izrazi, koji slijede, egzaktni diferencijali i odredi pripadne primitivne funkcije.

1. $$\underbrace{\frac{1}{z}}_{P} dx - \underbrace{\frac{3}{z}}_{Q} dy + \underbrace{\frac{3y - x}{z^2}}_{R} dz$$

Prema (149):

$$\frac{\partial P}{dy}=0 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0 , \quad \text{dakle} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{1}{z^2} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{1}{z^2} , \quad \text{dakle} \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{3}{z^2} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{3}{z^2} , \quad \text{dakle} \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{dy}.$$

Zadani izraz je egzaktni diferencijal!
Prema (150):

$$u(x, y, z)=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{z}\,dx-\int_{y_0}^{y}\frac{3}{z}\,dy+\int_{z_0}^{z}\frac{3y_0-x_0}{z^2}+C=$$

$$=\frac{1}{z}x-\frac{3}{z}y+0+C=\underline{\frac{x-3y}{z}+C}$$

2.
$$\frac{yz\,dx+xz\,dy-xy\,dz}{x^2y^2+z^2}$$

$$=\underbrace{\frac{yz}{x^2y^2+z^2}}_{P}dx+\underbrace{\frac{xz}{x^2y^2+z^2}}_{Q}dy-\underbrace{\frac{xy}{x^2y^2+z^2}}_{R}dz$$

Prema (149):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x^2y^2+z^2)\,z-yz\cdot 2x^2y}{(x^2y^2+z^2)^2}=\frac{z^3-x^2y^2z}{(x^2y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x^2y^2+z^2)\,z-xz\cdot 2xy^2}{(x^2y^2+z^2)^2}=\frac{z^3-x^2y^2z}{(x^2y^2+z^2)^2}$$

Na isti način dobijemo:

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{x^2y^3-yz^2}{(x^2y^2+z^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x^2y^3-yz^2}{(x^2y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{x^3y^2-xz^2}{(x^2y^2+z^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{x^3y^2-xz^2}{(x^2y^2+z^2)^2}$$

Vidimo, da je $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$ i $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$.

Prema (150):

$$u(x, y, z)=\int_{x_0}^{x}\frac{yz}{x^2y^2+z^2}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{x_0z}{x_0^2y^2+z^2}dy-\int_{z_0}^{z}\frac{x_0y_0}{x_0^2y_0^2+z^2}dz+C=$$

$$= \frac{yz}{y^2}\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{z}{y}\right)^2}+C=\frac{z}{y}\cdot\frac{1}{\frac{z}{y}}\,arc\,tg\,\frac{x}{\frac{z}{y}}+C=$$

$$= arc\,tg\left(\frac{xy}{z}\right)+C$$

Izvedi isto za

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad [u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C]$$

§ 8. EGZAKTNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE. EULEROV MULTIPLIKATOR

To su diferencijalne jednadžbe, čija je lijeva strana egzaktni diferencijal, t. j. totalni diferencijal neke funkcije $u = u(x, y)$. Prema tome egzaktna diferencijalna jednadžba ima općenito oblik

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Pri rješavanju tih jednadžbi razlikujemo dva slučaja:

Prvi slučaj

Lijeva strana zadane diferencijalne jednadžbe u tom obliku, kako je zadana, već je egzaktni diferencijal, t. j. ispunjen je uvjet (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

U tom slučaju rješavanje diferencijalne jednadžbe svodi se na primjenu formule (148), koju izjednačujemo s nulom.

Primjeri

Riješi diferencijalne jednadžbe

1.
$$\underbrace{e^y}_{P}\,dx+\underbrace{(x\,e^y-2y)}_{Q}\,dy=0$$

Prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=e^y-e^y=0$$

Diferencijalna jednadžba je egzaktna!

Prema (148):

$$\int_{x_0}^{x} e^y\, dx + \int_{y_0}^{y} (x_0 e^y - 2y)\, dy + C = 0$$

$$e^y \int_{x_0}^{x} dx - 2\int_{y_0}^{y} y\, dy + C = 0$$

$$\underline{x\, e^y - y^2 + C = 0} \;\ldots\ldots \text{ opće rješenje.}$$

2.

$$\frac{3x^2 - y^2}{y^4}\, dy = \frac{2x\, dx}{y^3}$$

ili

$$\frac{2x}{y^3}\, dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0$$

Prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2x \cdot 3y^2}{y^6} = -\frac{6x}{y^4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^4}\left(-6x\right) = -\frac{6x}{y^4}$$

Prema (148)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{2x}{y^3}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y^2 - 3x_0^2}{y^4}\, dy + C = 0$$

$$\frac{2}{y^3}\int_{x_0}^{x} x\, dx + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x_0^2}{y^4}\right) dy + C = 0$$

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C = 0 \quad \Big| \cdot y^3$$

$$\underline{x^2 - y^2 + Cy^3 = 0} \;\ldots\ldots \text{ opće rješenje.}$$

Napišemo li zadanu diferencijalnu jednadžbu u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^4}{y^3(3x^2 - y^2)}$$

ili

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

dobijemo homogenu diferencijalnu jednadžbu prvog reda, pa je možemo riješiti i na način naveden u dijelu II. Repetitorija § 10, 2. d).

Međutim, rješavajući tu diferencijalnu jednadžbu kao egzaktnu brže i jednostavnije dolazimo do općeg rješenja.

3.
$$\frac{x\,dy}{x^2+y^2}-\frac{y\,dx}{x^2+y^2}+dx=0$$

ili

$$\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$$

Prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Prema (148):

$$\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\int_{y_0}^{y}\frac{x_0}{x_0^2+y^2}dy+C=0$$

$$x-y\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^2+y^2}+C=0$$

$$\underline{x-arc\,tg\,\frac{x}{y}+C=0}\quad \text{.... opće rješenje.}$$

4.
$$y'=-\frac{y\,x^{y-1}}{x^y\,ln\,x}$$

ili

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y\,x^{y-1}}{x^y\,ln\,x}$$

Odatle

$$y\,x^{y-1}\,dx+x^y\,ln\,x\,dy=0$$

Prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=y\,x^{y-1}\,ln\,x+x^{y-1}\quad;\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=x^y\cdot\frac{1}{x}+ln\,x\cdot y\,x^{y-1}=x^{y-1}+y\,x^{y-1}\cdot ln\,x$$

Prema (148):

$$\int_{x_0}^{x}y\,x^{y-1}\,dx+\int_{y_0}^{y}x_0^y\,ln\,x_0\,dy+C=0$$

$$y\cdot\frac{x^y}{y}+0+C=0$$

$$\underline{x^y+C=0}\quad \text{.... opće rješenje.}$$

Riješi egzaktne diferencijalne jednadžbe:

1. $$\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = 0$$

$$\left[xy - arc\,tg\,\frac{x}{y} + C = 0\right]$$

2. $$2x^3\,dx + 2y^3\,dy - xy^2\,dx - x^2 y\,dy = 0$$

$$[x^4 - x^2 y^2 + y^4 + C = 0]$$

3. $$y' = \frac{1 + e^{\frac{x}{y}}}{e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y} - 1\right)}$$

$$\left[x - arc\,tg\,\frac{x}{y} + C = 0\right]$$

Drugi slučaj

Pretpostavimo, da lijeva strana diferencijalne jednadžbe oblika

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad \text{(a)}$$

nije egzaktni diferencijal, t. j.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

U tom slučaju ne možemo integrirati diferencijalnu jednadžbu, jer ne postoji funkcija, čiji bi totalni diferencijal bio jednak lijevoj strani jednadžbe, pa moramo najprije pretvoriti izraz u lijevoj strani jednadžbe u egzaktni diferencijal i tek zatim integrirati. U tu svrhu treba odrediti t. zv. Eulerov multiplikator. To je neka funkcija $\mu(x, y)$, kojom množimo obje strane diferencijalne jednadžbe (od toga se opće rješenje jednadžbe ne mijenja), pa tako pretvaramo lijevu stranu jednadžbe u egzaktni diferencijal, koji možemo zatim integrirati.

Pomnožimo, dakle jednadžbu (a) nekom funkcijom $\mu(x, y)$. Dobijemo:

$$P\mu\,dx + Q\mu\,dy = 0$$

Da lijeva strana te dobivene jednadžbe bude egzaktni diferencijal, nužno je i dovoljno, da bude ispunjen uvjet (147), t. j. mora biti

$$\frac{\partial (P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial (Q\mu)}{\partial x}$$

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \quad /:\mu$$

$$Q\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

a kako je

$$\frac{\partial ln\mu}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial ln\mu}{\partial y}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

imamo

$$Q\frac{\partial ln\mu}{\partial x}-P\frac{\partial ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{151}$$

Jasno je, da će svaka funkcija $\mu(x, y)$, koja zadovoljava jednadžbu (151), biti Eulerov multiplikator za zadanu diferencijalnu jednadžbu (a). Jednadžba (151) je dakle diferencijalna jednadžba Eulerovih multiplikatora jednadžbe (a) i to p a r c i j a l n a diferencijalna jednadžba, jer je traženi multiplikator funkcija dviju promjenljivih x i y, pa u diferencijalnu jednadžbu ulaze p a r c i j a l n e derivacije. Teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi dokazuje, da jednadžba (151) ima beskonačno mnogo rješenja, dakle naša diferencijalna jednadžba (a) ima uvijek Eulerov multiplikator.

Međutim, praktički nismo ništa napredovali u rješavanju zadane diferencijalne jednadžbe (a), jer rješavanje jednadžbe (151) nikako nije lakše od rješavanja polazne jednadžbe, pa se moramo ograničiti samo posebnim slučajevima određivanja Eulerova multiplikatora $\mu(x, y)$.

1. Pretpostavimo, da je multiplikator μ funkcija samo od x: $\mu=\mu(x)$.
Tada u (151)

$$\frac{\partial ln\mu}{\partial x}=\frac{d ln\mu}{dx}, \quad \text{a} \quad \frac{\partial ln\mu}{\partial y}=0$$

jer u μ ne ulazi y, pa jednadžba (151) prima jednostavniji oblik:

$$\frac{dln\mu}{dx}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{152}$$

To je obična diferencijalna jednadžba, koju možemo lako integrirati.
Slično imamo, ako je μ funkcija samo od y, t. j. $\mu=\mu(y)$.
Tada je

$$\frac{\partial ln\mu}{\partial x}=0, \quad \text{a} \quad \frac{\partial ln\mu}{\partial y}=\frac{dln\mu}{dy}$$

pa jednadžba (151) prima oblik:

$$\frac{dln\mu}{dy}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{152a}$$

Primjeri

1. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$

Prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (4xy - 1) - 1 = 4xy - 2$$

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0$, dakle lijeva strana zadane diferencijalne jednadžbe nije egzaktni diferencijal.

Pretpostavimo, da je $\eta = \eta(x)$. Da se uvjerimo da to stoji, računamo prema (152):

$$\frac{d\,ln\,\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{4xy - 2}{y^2 + x + y}$$

Vidimo, da μ nije funkcija samo od x, jer u dobiveni izraz ulazi i y.

Uzmimo sada, da je $\mu = \mu(y)$, pa računamo prema (152a):

$$\frac{d\,ln\,\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{2xy^2 - y}(2 - 4xy) = -\frac{2(2xy - 1)}{y(2xy - 1)} = -\frac{2}{y}$$

Vidimo, da je μ faktično funkcija samo od y.

Integriramo dobivenu jednadžbu:

$$\frac{d\,ln\,\mu}{dy} = -\frac{2}{y} \;|\cdot dy$$

$$d\,ln\,\mu = -2\frac{dy}{y}$$

Odatle

$$ln\,\mu = -2\,ln\,y$$

$$ln\,\mu = ln\,y^{-2}$$

$$\mu = \frac{1}{y^2} \text{ ...... Eulerov multiplikator.}$$

Tim multiplikatorom množimo zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$(2xy^2 - y)\frac{1}{y^2}dx + (y^2 + x + y)\cdot\frac{1}{y^2}dy = 0 \qquad \text{(b)}$$

Kako je sada $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, jer je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2}$$

intregriramo prema (148) jednadžbu (b):

$$\int_{x_0}^{x}\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(1 + \frac{x_0}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy + C = 0$$

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + ln\,y + C = 0 \text{ .... opće rješenje.}$$

2. $(x \sin y + y \cos y)\, dx + (x \cos y - y \sin y) dy = 0,$ (a)

Prema (147):

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = x \cos y - y \sin y + \cos y - \cos y = x \cos y - y \sin y \neq 0 \quad \text{(b)}$$

Neka je $\mu = \mu(x)$, tada prema (152) i (b) imamo:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{x \cos y - y \sin y}(x \cos y - y \sin y) = 1$$

μ ne ovisi o y.

$$d \ln \mu = dx$$

$$\ln \mu = x$$

$$\underline{\mu = e^x} \ldots \text{ Eulerov multiplikator.}$$

(a) množimo s $\mu = e^x$

$$e^x (x \sin y + y \cos y) dx + e^x (x \cos y - y \sin y) dy = 0$$

Sada je $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, jer je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y + \cos y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y + (x \cos y - y \sin y) e^x = e^x (\cos y + x \cos y - y \sin y),$$

pa prema (148) imamo:

$$\int_{x_0}^{x} e^x (x \sin y + y \cos y) dx + \int_{y_0}^{y} e^{x_0}(x_0 \cos y - y \sin y) dy + C = 0$$

Odatle

$$\sin y (x e^x - e^x) + e^x y \cos y + C = 0$$

ili

$$\underline{e^x (x \sin y - \sin y + y \cos y) + C = 0} \ldots \text{ opće rješenje.}$$

Primjedba

Iz navedenog vidimo, da se diferencijalne jednadžbe oblika

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

lako rješavaju, ako je lijeva strana jednadžbe egzaktni diferencijal, tj. ako je ispunjen uvjet integrabilnosti

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

Međutim, ako taj uvjet nije ispunjen, moramo najprije odrediti Eulerov multiplikator, a taj znamo odrediti samo u posebnim slučajevima, kad je multiplikator funkcija samo od x ili samo od y.

Iz toga slijedi, da diferencijalne jednadžbe oblika

$$P(x, y)dx + Q(x, y) = 0$$

ukoliko nije ispunjen uvjet integrabilnosti, treba u većini slučajeva rješavati na drugi način, izbjegavajući traženje Eulerova multiplikatora.

Tako, na pr., ako su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ homogene funkcije istog stepena n, tada se diferencijalna jednadžba dade prikazati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

a to je homogena diferencijalna jednadžba I. reda, koju znamo riješiti uz supstituciju $z = \frac{y}{x}$ [vidi Dio II. § 10, 2. d), Tip II.].

Isto tako znamo riješiti separacijom promjenljivih jednadžbe oblika

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

odnosno

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)dx - (a_2 x + b_2 y + c_2)dy = 0$$

[vidi Dio II. § 10, 2. g)].

Važnu primjenu egzaktnih diferencijala nalazimo u termodinamici kod izvođenja matematičkog izraza za entropiju (vidi Bošnjaković, Nauka o toplini I. str. 63).

Riješi diferencijalne jednadžbe:

1. $2xy^3\, dx + (x^2 y^2 - 1)\, dy = 0$ $\left[\mu = \frac{1}{y^2};\quad x^2 y + \frac{1}{y} + C = 0\right]$

2. $(2 + 2x - y^2)\, dx - 2y\, dy = 0$ $[\mu = e^x;\quad e^x (2x - y^2) + C = 0]$

3. $xy\, dx + (x^2 - y^2 + 1)\, dy = 0$ $\left[\mu = y;\quad \frac{y^2}{2}\left(x^2 - \frac{y^2}{2} + 1\right) + C = 0\right]$

4. $y(1 + xy)dx - x\, dy = 0$ $\left[\mu = \frac{1}{y^2};\quad \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0\right]$

1. Jednadžbe prostornih krivulja

Dosada je bilo govora samo o ravnim krivuljama, t. j. o krivuljama, čije točke leže u jednoj ravnini. Uzmemo li tu ravninu za koordinatnu ravninu XY, glasi jednadžba te ravne krivulje

$$y = f(x) \quad \text{ili} \quad F(x, y) = 0$$

Ako sve točke krivulje ne leže u jednoj ravnini, imamo prostornu krivulju, pa je za određivanje položaja njenih točaka potreban prostorni koordinatni sustav XYZ.

Prostorna krivulja može biti zadana na dva načina:

1. kao presječnica dviju zadanih ploha:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right| \tag{153}$$

Na pr. sustavom jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4r^2 \\ x^2 + y^2 &= 2ry \end{aligned}\right| \tag{a}$$

zadana je prostorna krivulja kao presječnica kugline plohe, kojoj je središte u ishodištu a polumjer $R = 2r$, i uspravnog valjka:

$$x^2 + y^2 = 2ry$$

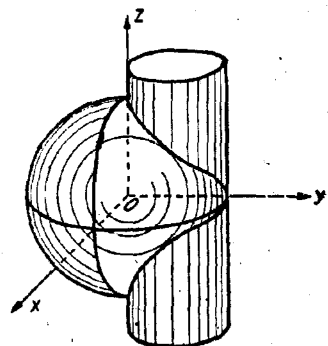
ili

$$x^2 + (y^2 - 2ry) = 0$$

ili

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2 ,$$

kojemu je središte osnovke u točki $(0, r, 0)$, a polumjer je r (slika 148).



Sl. 148

Uklonimo li iz jednadžbi (153) jednu promjenljivu, a zatim drugu, na pr. z i x, dobit ćemo jednadžbe

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= 0 \\ \varphi_2(y, z) &= 0 \end{aligned}\right| \tag{153a}$$

koje predočuju ortogonalne projekcije prostorne krivulje na koordinatne ravnine XY i YZ (u deskriptivnoj geometriji rekli bismo, da smo odredili projekcije prodora zadanih ploha na ravnine π_1 i π_2).

Prostorna krivulja može biti dakle zadana i svojim projekcijama u dvije koordinatne ravnine.

Uklonimo li, na pr., iz jednadžbi (a) promienljivu x tako, da drugu jednadžbu uvrstimo u prvu, dobit ćemo

$$2ry + z^2 = 4r^2$$

ili

$$z^2 = 4r^2 - 2ry$$

ili

$$z^2 = -2r(y - 2r)$$

To je projekcija prodorne krivulje zadanih kugle i valjka na ravninu YZ (na π_2), i to parabola s vrhom u točki $(2r, 0)$.

2. Praktički se najviše služimo parametarskom jednadžbom prostorne krivulje. Do nje dolazimo promatrajući prostornu krivulju kao stazu pomične točke, t. j. kao geometrijsko mjesto svih njezinih uzastopnih položaja u prostoru.

Gibanje točke u prostoru posve je određeno, ako je u svaki moment t poznat položaj točke ili, drugim riječima, ako za svaku vrijednost t možemo izračunati koordinate x, y i z pomične točke. Na taj način dolazimo do jednadžbe pomične točke u prostoru:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right| \qquad (154)$$

Budući da te jednadžbe određuju i stazu točke, one su istodobno i parametarske jednadžbe prostorne krivulje.

Uklonimo li iz jednadžbi (154) parametar t, dobit ćemo jednadžbe (153).

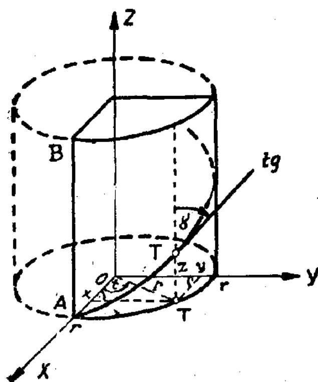
Primijetimo još, da se često parametar t ne smatra vremenom, već mu se daje značenje neke druge veličine, koja se mijenja pri gibanju točke, na pr. kut zaokreta i t. d.

Kao primjer izvedimo parametarsku jednadžbu cilindričke spirale (zavojnice).

Zamislimo, da se po jednoj kružnici, koja je presjek uspravnog valjka polumjera osnovke r, okomit na njegovu os, okreće jednoliko sa stalnom brzinom a neka točka. Istodobno se ta kružnica giblje translatorno po plaštu valjka s konstantnom brzinom b. U tom slučaju opisuje točka u svom dvostrukom gibanju prostornu krivulju, koja se zove cilindrička spirala.

Na slici 149 prikazana je spirala u desnom koordinatnom sustavu obzirom na primjenu vektorske analize u teoriji prostornih krivulja.

Okreće li se točka po kružnici protiv kazaljke na satu, nastaje desna spirala ili desni vijak (kao na slici 149), u protivnom slučaju — lijevi vijak.



Sl. 149

Neka se u neki moment t pomična točka nalazi u točki $T(x, y, z)$; tada uzevši za parametar t polazni kut projekcije T' točke T na ravninu XY, dobijemo prema slici 149:

$$x = r \cdot \cos t$$

$$y = r \cdot \sin t$$

Što se tiče aplikate z točke T, ona je jednaka visini, na koju se podigla točka za vrijeme t', t. j.

$$z = b \cdot t' \qquad \text{(b)}$$

Za vrijeme t' točka je prošla po kružnici put $\widehat{AT'} = a \cdot t'$, a iz slike vidimo, da je $\widehat{AT'} = r \cdot t$ pa je

$$a\,t' = r \cdot t$$

odatle

$$t' = \frac{r}{a} t$$

Uvrštenje u (b) daje

$$z = b \cdot \frac{r}{a} t$$

ili

$$z = ct$$

gdje je

$$c = b\frac{r}{a} = \frac{b}{a} r$$

Tu je $\frac{b}{a}$ omjer stalnih brzina gibanja kružnice po plaštu valjka i točke po toj kružnici.

Prema tome

$$x = r \cos t$$
$$y = r \sin t \qquad (155)$$
$$z = ct$$

parametarska jednadžba cilindričke spirale.

Kada kut t dobije vrijednost 2π, točka T će se vratiti na polaznu izvodnicu AB valjka, pa će se dignuti na visinu

$$z = c \cdot 2\pi$$

Ta visina

$$h = 2\pi c$$

zove se uspon vijka, pa uvrstivši u treću jednadžbu sustava (155) $c = \frac{h}{2\pi}$ dobijemo parametarsku jednadžbu spirale u obliku

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t \qquad (155a)$$

$$z = \frac{h}{2\pi} t$$

gdje je $h = 2\pi c$ = uspon vijka.

Rekli smo, da uklonivši iz parametarskih jednadžbi prostorne krivulje parametar t, dobijemo prostornu krivulju kao presječnicu dviju ploha.

Pokažimo to na primjeru.

Prostorna krivulja neka je zadana parametarski s

$$x = t + a$$

$$y = \sqrt{a^2 - t^2}$$

$$z = \sqrt{2a(a-t)}$$

Kako je iz prve jednadžbe

$$t = x - a$$

uvrštenje te vrijednosti t u drugu i treću jednadžbu daje:

$$y = \sqrt{a^2 - (x - a)^2}$$

$$z = \sqrt{2a(2a - x)}$$

ili

$$\left.\begin{aligned} (x - a)^2 + y^2 &= a^2 \\ z^2 &= -2a(x - 2a) \end{aligned}\right| \qquad (a)$$

Zadana je krivulja presječnica kružnog i paraboličkog valjka, a ortogonalne projekcije zadane prostorne krivulje u ravninama XY i XZ su kružnica i parabola.

Zbrojimo li jednadžbe (a), dobit ćemo jednadžbu kugline plohe

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

To znači: zadana prostorna krivulja leži na kugli polumjera $2a$, a presječnica je kugline plohe s gore navedenim valjkastim plohama.

U daljnjem ograničit ćemo se na proučavanje prostornih krivulja, čije su jednadžbe zadane u parametarskom obliku.

2. Jednadžba tangente na prostornu krivulju

Tražimo jednadžbu tangente na prostornu krivulju

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right|$$

u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ krivulje, kojoj odgovara vrijednost t_0 parametra t.

Dademo li parametru t_0 prirast Δt po volji, dobit će koordinate točke T_0 priraste Δx, Δy i Δz, pa će točka T_0 zauzeti na krivulji nov položaj T (vidi sl. 150).

Jednadžbe sekante T_0T znamo napisati prema (41):

$$\frac{x-x_0}{(x_0+\Delta x)-x_0} = \frac{y-y_0}{(y_0+\Delta y)-y_0} = \frac{z-z_0}{(z_0+\Delta z)-z_0}$$

ili

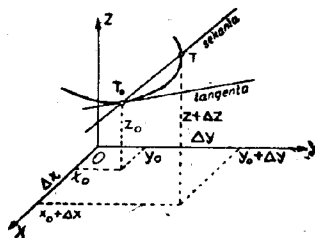
$$\frac{x-x_0}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{\Delta y} = \frac{z-z_0}{\Delta z} \tag{a}$$

Kako je tangenta granični položaj sekante, kad točka T idući po krivulji teži točki T_0 kao limesu, moramo prijeći na limes tako, da $\Delta t \to 0$, pa prema tome i $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ i $\Delta z \to 0$. U tu svrhu podijelimo sve nazivnike u jednadžbi (a) s Δt:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$$

i pređimo na limes pustivši da Δt teži nuli. Na granici ćemo dobiti:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0} \tag{156}$$



Sl. 150

To je jednadžba tangente na prostornu krivulju u točki krivulje $T_0(x_0, y_0, z_0)$ parametra t_0.

Vidimo, da su koeficijenti smjera tangente jednaki derivacijama koordinata po parametru t u točki T_0 krivulje, pa prema (39) možemo lako izračunati koeficijente smjera tangente.

Pomnožimo li sve nazivnike u formuli (156) s dt, dobit ćemo jednadžbu tangente u obliku

$$\frac{x-x_0}{dx} = \frac{y-y_0}{dy} = \frac{z-z_0}{dz} \tag{156a}$$

koji je najopćenitiji, jer nezavisna promjenljiva nije označena, pa može biti bilo koja koordinata ili bilo koji parametar.

3. Jednadžba normalne ravnine na prostornu krivulju

U točki $T_o(x_o, y_o, z_o)$ prostorne krivulje

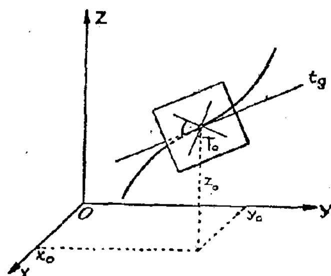
$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right|$$

možemo povući bezbroj normala, t. j. pravaca, koji su okomiti na tangenti u toj točki krivulje. Sve te tangente leže u jednoj ravnini, koja je okomita na tangenti, a prolazi diralištem. Ta se ravnina zove **normalna ravnina** na krivulju u zadanoj točki $T_o(x_o, y_o, z_o)$ krivulje (vidi sl. 151).

Znamo jednadžbu (50a) ravnine kroz zadanu točku $T_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A_1(x - x_o) + B_1(y - y_o) + (z - z_o) = 0 \tag{a}$$

Normalna ravnina je okomita na tangenti, koja prolazi istom točkom $T_o(x_0, y_o, z_o)$ krivulje, pa uzevši u obzir, da su prema (156) koeficijenti smjera tangente



Sl. 151

$$x'(t_o), \quad y'(t_o) \quad \text{i} \quad z'(t_o)$$

imamo prema (58):

$$\frac{A_1}{x'(t_o)} = \frac{B_1}{y'(t_o)} = \frac{1}{z'(t_o)}$$

Odatle

$$A_1 = \frac{x'(t_o)}{z'(t_o)} \quad ; \quad B_1 = \frac{y'(t_o)}{z'(t_o)}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$(x - x_o)\, x'(t_o) + (y - y_o)\, y'(t_o) + (z - z_o)\, z'(t_o) = 0 \tag{157}$$

To je **jednadžba normalne ravnine na prostornu krivulju u točki** krivulje $T_o(x_o, y_o, z_o)$ **parametra** t_o.

4. Rektifikacija i masa prostorne krivulje

Tražimo duljinu luka prostorne krivulje

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right|$$

od točke A do točke B, kojima odgovaraju vrijednosti parametra t_1, odnosno t_2 (sl. 152),

Smatrajući, kao u slučaju ravne krivulje, da su dx, dy i dz beskonačno male veličine, dobijemo prema sl. 152 primijenivši prostorni Pitagorin poučak slijedeći izraz za

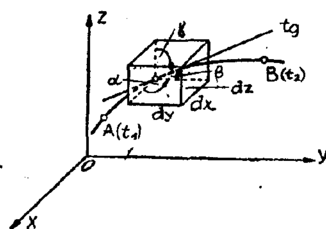
kvadrat diferencijala luka prostorne krivulje

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (158)$$

Odatle je

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \qquad (158a)$$

Iz iste slike dobijemo kosinuse smjera tangente na prostornu krivulju:



Sl. 152

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \qquad (159)$$

Pomnožimo li i podijelimo li desnu stranu formule (158a) s dt, dobijemo ds u obliku

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (160)$$

ili

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (160a)$$

a odatle je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (161)$$

To je duljina luka prostorne krivulje zadane parametarski.

Pretpostavimo, da je prostorna krivulja pokrivena nehomogenom masom gustoće $\mu = \mu(x, y, z)$.

Tada je masa elementa krivulje

$$dm = \mu(x, y, z) ds$$

a odatle uzevši u obzir formulu (160a) i uvrstivši u dm $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$ dobijemo:

masa nehomogene krivulje

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \mu[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (162)$$

Kao primjer izračunajmo za cilindričku spiralu

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

$$z = c\, t$$

jednadžbu tangente u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ parametra t_0, a također duljinu jednog zavoja spirale (sl. 149).

Računamo prema (156):

$$x'(t) = -r \sin t$$

$$y'(t) = r \cos t$$

$$z'(t) = c$$

pa uvrštenje u (156) daje traženu jednadžbu tangente:

$$\frac{x - x_0}{-r \sin t_0} = \frac{y - y_0}{r \cos t_0} = \frac{z - z_0}{c}$$

Izračunajmo sada prema (39) kosinus kuta γ, što ga tangenta na spiralu zatvara s osi Z u točki T_0 spirale:

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{r^2 \sin^2 t_0 + r^2 \cos^2 t_0 + c^2}}$$

ili

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$

a kako je $c = \frac{h}{2\pi}$, gdje je h uspon vijka, dobijemo:

$$\cos \gamma = \frac{h}{2\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}} = \frac{h}{\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}}$$

Vidimo, da kut, što ga zatvara cilindrička spirala s osi Z, ne ovisi o koordinatama točaka krivulje, već jedino o polumjeru r valjka i o usponu h vijka. To znači: cilindrička spirala siječe sve izvodnice valjka pod istim kutom γ (sl. 149).

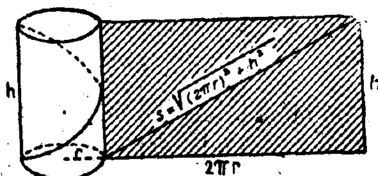
Iz toga slijedi, da će cilindrička spirala poprimiti oblik pravca, ako plašt valjka, na kojem leži spirala, razgrnemo u ravninu, jer samo pravac siječe u ravnini paralelne pravce (izvodnice valjka) pod stalnim kutom.

Da se u to uvjerimo, izračunajmo duljinu luka jednoga zavoja spirale (jednog hoda vijka).

Računamo prema (161):

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2} \cdot dt =$$

$$= \sqrt{r^2 + c^2} \cdot \Big| t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \sqrt{r^2 + c^2}$$



Sl. 153

ili uzevši, da je $c = \frac{h}{2\pi}$, dobijemo

$$s = 2\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} = \underline{\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}}$$

Iz toga izraza vidimo, da je duljina luka spirale jednaka duljini dijagonale pravokutnika, kojemu su stranice $2\pi r$ — opseg osnovke valjka i h — uspon vijka, t. j. pravokutnika, u koji se razgrne plašt valjka (sl. 153).

Prema tome, razgrnemo li plašt valjka u ravninu, zauzet će cilindrička spirala u dobivenom pravokutniku položaj dijagonale, t. j. pravca.

Iz toga slijedi novo važno svojstvo cilindričke spirale:

luk cilindričke spirale je najkraća udaljenost dviju točaka na valjku.

Krivulja na plohi, koja prolazi dvjema zadanim točkama plohe i koja daje njihovu najkraću međusobnu udaljenost, zove se geodetska linija dotične plohe. Znamo, da je za ravninu geodetska linija pravac, za kuglu — luk najveće kružnice, a sada smo pokazali, da je za valjak geodetska linija cilindrička spirala.

Navedimo još jedan primjer.

Izračunaj masu prvog zavoja cilindričke spirale

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \\ z &= c\, t \end{aligned}\right|$$

ako je gustoća u svakoj točki krivulje jednaka kvadratu radijvektora te točke.

Prema sl. 149:

$$\text{radijvektor } OT = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + c^2 t^2}$$

pa je gustoća $\mu = r^2 + c^2 t^2$

Prema (162) i obzirom na predašnji primjer imamo:

$$m = \int_0^{2\pi} (r^2 + c^2 t^2) \sqrt{r^2 + c^2} \cdot dt =$$

$$= \sqrt{r^2 + c^2} \Big| r^2 t + c^2 \frac{t^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \underline{\sqrt{r^2 + c^2} \left(2\pi r^2 + \frac{8}{3}\pi^3 c^2\right)}$$

5. Jednadžba oskulacione ravnine

Pod oskulacionom ravninom zadane točke $T_0(x_0, y_0, z_0)$ prostorne krivulje razumije se granični položaj ravnina, koje prolaze tangentom na krivulju u točki T_0, a paralelne su s tangentom povučenom na krivulju u nekoj drugoj točki T_1, kad točka T_1 idući po krivulji teži točki T_0 kao limesu (sl. 154).

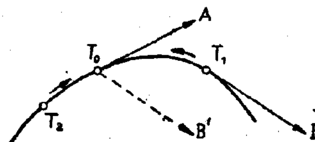
Zamislimo ravninu, koja prolazi tangentom T_0A u točki T_0 prostorne krivulje i pravcem T_0B', koji je paralelan s tangentom T_1B u točki T_1 krivulje. Pustimo li da točka T_1 idući po krivulji teži točki T_0 kao limesu, tada će se ravnina, koja prolazi tangentom T_0A i pravcem paralelnim s tangentom u točki T_1 okretati oko tangente T_0A pa će težiti nekom graničnom položaju. Taj granični položaj zove se r a v n i n a o s k u l a c i j e ili o s k u l a c i o n a r a v n i n a u t o č k i T_0 p r o s t o r n e k r i v u l j e.

Vidimo, da oskulaciona ravnina sadrži uvijek tangentu povučenu na prostornu krivulju u dotičnoj točki. Redovito oskulaciona ravnina dira i siječe krivulju. Iz definicije oskulacione ravnine jasno slijedi, da se za ravnu krivulju oskulaciona ravnina podudara s ravninom krivulje.

Oskulacionu ravninu u točki T_0 prostorne krivulje možemo definirati i kao granični položaj ravnine, koja prolazi točkama T_0, T_1 i T_2 prostorne krivulje (vidi sl. 154), kad točke T_1 i T_2 idući po krivulji teže točki T_0 kao limesu.

Na temelju te druge definicije izvedimo jednadžbu oskulaciona ravnine u točki T_0 prostorne krivulje

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{i} \quad z = z(t).$$



Sl. 154

Znamo opću jednadžbu ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{(a)}$$

Ravnina prolazi točkama $T_0(x_0, y_0, z_0)$, $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$, dakle

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Kako sve te tri točke leže na krivulji, možemo jednadžbe (b) prikazati u jednostavnijem obliku.

Uvrstivši u jednadžbu (a)

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad z = z(t)$$

dobijemo:

$$Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D = 0$$

To je funkcija samo od t, označimo je s $F(t)$:

$$F(t) = Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D = 0 \qquad \text{(c)}$$

Točke T_o, T_1 i T_2, kojima odgovaraju vrijednosti parametra t_o, t_1 i t_2, leže na krivulji, a prema tome te vrijednosti parametra moraju zadvoljavati jednadžbu (c), pa jednadžbe (b) možemo napisati u obliku:

$$F(t_o) = 0; \qquad F(t_1) = 0; \qquad F(t_2) = 0.$$

Po Rolle-ovom teoremu (vidi Dio I. § 11) derivacija funkcije F mora se poništiti bar po jedan put u intervalima od t_o do t_1 i od t_2 do t_o, t. j.

$$F'(t') = 0 \qquad \text{i} \qquad F'(t'') = 0$$

gdje je

$$t_o < t' < t_1 \qquad \text{i} \qquad t_2 < t'' < t_o \tag{d}$$

Primijenivši još jednom Rolle-ov teorem, ali sada za F' dobijemo:

$$F''(t''') = 0$$

gdje je

$$t'' < t''' < t' \tag{e}$$

Prema tome jednadžbe (b) možemo napisati u obliku

$$F(t_o) = 0; \qquad F'(t') = 0; \qquad F''(t''') = 0 \tag{f}$$

Neka sada točke T_1 i T_2 idući po krivulji teže točki T_o kao limesu, t. j. neka

$$t_1 \to t_o \qquad \text{i} \qquad t_2 \to t_o.$$

Tada će prema (d)

$$t' \to t_o; \qquad t'' \to t_o$$

a dakle prema (e) i

$$t''' \to t_o$$

pa jednadžbe (f) primaju na granici oblik

$$F(t_o) = 0; \qquad F'(t_o) = 0; \qquad F''(t_o) = 0$$

ili prema (c):

$$F(t_o) = Ax(t_o) + By(t_o) + Cz(t_o) + D = 0$$
$$F'(t_o) = Ax'(t_o) + By'(t_o) + Cz'(t_o) = 0$$
$$F''(t_o) = Ax''(t_o) + By''(t_o) + Cz''(t_o) = 0$$

Uzmemo još u obzir, da oskulaciona ravnina prolaži točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$, pa njena jednadžba prema (50) glasi:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0.$$

Posljednje tri jednadžbe

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$$
$$Ax'(t_o)+By'(t_o)+Cz'(t_o)=0$$
$$Ax''(t_o)+By''(t_o)+Cz''(t_o)=0$$

čine homogeni sustav s tri nepoznanice A, B, C. Znamo, da takav sustav ima rješenja različita od očevindnih, ako je determinanta sustava jednaka nuli (vidi § 1, 3).

Prema tome je

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x'(t_o) & y'(t_o) & z'(t_o) \\ x''(t_o) & y''(t_o) & z''(t_o) \end{vmatrix} = 0 \qquad (163)$$

jednadžba oskulacione ravnine u točki $T_o(x_o, y_o, z_o)$ parametra t_o prostorne krivulje.

Primjeri

1. Napiši jednadžbu oskulacione ravnine u točki $A(r, 0, 0)$ cilindričke spirale $x = r\cos t$, $y = r\sin t$; $z = ct$ (sl. 149).

Da odredimo vrijednost parametra t, koja odgovara zadanoj točki $A(r, 0, 0)$, uvrstimo koordinate te točke u jednadžbu spirale.

Dobijemo: $r = r\cos t$; $0 = r\sin t$, $0 = ct$

Slijedi $t_0 = 0$

Računamo prema (163):

$$x = r\cos t \qquad y = r\sin t \qquad z = ct$$
$$x' = -r\sin t \qquad y' = r\cos t \qquad z' = c$$
$$x'' = -r\cos t \qquad y'' = -r\sin t \qquad z'' = 0$$

a u točki A parametra $t = t_0 = 0$

$$x_0 = r \qquad y_0 = 0 \qquad z_0 = 0$$
$$x'_0 = 0 \qquad y'_0 = r \qquad z'_0 = c$$
$$x''_0 = -r \qquad y''_0 = 0 \qquad z''_0 = 0$$

Uvrštenje u (163) daje:

$$\begin{vmatrix} x-r & y & z \\ 0 & r & c \\ -r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Razvijemo li determinantu po elementima prvog retka, dobijemo traženu jednadžbu oskulacione ravnine:

$$(x-r)\cdot 0 - ycr + zr^2 = 0$$

ili

$$\underline{cy - rz = 0}$$

Iz te jednadžbe vidimo, da je u točki $A(r, 0, 0)$ spirale oskulaciona ravnina okomita na ravninu YZ i ima za trag u toj ravnini pravac $z = \frac{c}{r} y$, koji prolazi ishodištem O koordinatnog sustava. Oskulaciona ravnina sadrži dakle os X.

2. Odredi jednadžbe tangente i normalne i oskulacione ravnine u točki $t_0 = 1$ krivulje

$$x = t^3 - 1 \quad ; \quad y = t + t^2 \quad ; \quad z = 4\,t^3 - 3\,t + 1$$

Računamo:

$$x' = 3t^2 \qquad y' = 1 + 2t \qquad z' = 12t^2 - 3$$

$$x'' = 6t \qquad y'' = 2 \qquad z'' = 24\,t$$

a u točki $t_0 = 1$

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 2 \qquad z_0 = 2$$

$$x_0' = 3 \qquad y_0' = 3 \qquad z_0' = 9$$

$$x_0'' = 6 \qquad y_0'' = 2 \qquad z_0'' = 24$$

Uvrštenje u (156), (157) i (163) daje:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{9}$$

ili

$$\underline{\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}} \quad \ldots. \text{ jednadžba tangente.}$$

$$x \cdot 3 + (y - 2) \cdot 3 + (z - 2) \cdot 9 = 0$$

ili

$$\underline{x + y + 3z - 8 = 0} \quad \ldots \text{ jednadžba normalne ravnine.}$$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

Odatle

$$x \cdot 9 - (y - 2) \cdot 3 + (z - 2)(-2) = 0$$

ili

$$\underline{9x - 3y - 2z + 10 = 0} \quad \ldots \text{ jednadžba oskulacione ravnine.}$$

Odredi jednadžbe tangente i normalne i oskulacione ravnine za krivulje:

1. $x = 2t \quad ; \quad y = t^2 \quad ; \quad z = 4t^4 \quad$ u točki $t_0 = 1$

$$\left[\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{8} \quad ; \quad x + y + 8z - 35 = 0 \quad ; \quad 16x - 24y + z - 12 = 0\right]$$

2. $x = t^2 - 1$; $y = t + 1$; $z = t^3$ u točki $t_0 = 2$

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-8}{12} \quad ; \quad 4x + y + 12z - 111 = 0 \quad ; \quad 6x - 12y - z + 26 = 0 \Big]$$

3. Izračunaj duljinu luka krivulje

$$x = e^t \cos t \quad ; \quad y = e^t \sin t \quad ; \quad z = e^t$$

od točke $A(1, 0, 1)$ do točke, kojoj odgovara vrijednost t parametra.

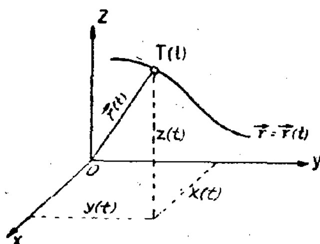
$$[s = \sqrt{3}\,(e^t - 1)]$$

6. Jednadžba prostorne krivulje u vektorskom obliku

Znamo, da svakoj točki $T(x, y, z)$ prostora možemo dodijeliti radijvektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

i da je tim vektorom $\vec{r}$ položaj točke T u prostoru posve određen (sl. 155)



Sl. 155.

Ako se točka T giblje u prostoru opisujući neku krivulju, tada se njene koordinate mijenjaju u zavisnosti od vremena ili nekog drugog skalarnog parametra, pa staza točke može biti zadana jednadžbama

$$x = x(t)\,; \quad y = y(t)\,; \quad z = z(t)$$

Međutim, pri gibanju točke T mijenja se i radijvektor r, pa će se njegova zavisnost od parametra t izraziti jednakošću

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Uzmemo li obratno, da je zadan zakon, po kojemu se mijenja radijvektor $\boldsymbol{r}$ točke T u zavisnosti od parametra t

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

tada je određen zakon gibanja točke u prostoru, dakle posve je određena i njena staza.

Mjesto tri parametarske jednadžbe prostorne krivulje imamo sada samo jednu vektorsko-parametarsku jednadžbu krivulje.

U mnogim je slučajevima zgodno uzeti za parametar t duljinu s luka krivulje, koja se računa od neke početne točke A po volji izabrane na krivulji. Tada vektorska jednadžba prostorne krivulje glasi:

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

U daljnjem tumačenju prostornih krivulja služit ćemo se radi jednostavnosti izvoda osnovama vektorske analize, koje smo izložili u točki 8. § 2 (vidi to!), pri čemu jednadžbu prostorne krivulje uzet ćemo u vektorskom obliku.

7. Zakrivljenost prostorne krivulje

Zakrivljenost prostorne krivulje mjeri se promjenom smjera njene tangente, pa se definira na isti način kao i zakrivljenost ravne krivulje. (vidi Dio II. § 4).

Neka je prostorna krivulja zadana jednadžbom

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

pri čemu vrijednosti s duljine luka krivulje odgovara točka T krivulje (sl. 156).

Dademo li tom luku s prirast Δs, dobit ćemo na krivulji točku T' parametra $(s+\Delta s)$. U tim točkama T i T' konstruiramo tangente na krivulju i dodijelimo tangentama jedinične vektore $\vec{t_o}$ i $\vec{t_o}'$. Sada prenesimo paralelnim pomakom ort $\vec{t_o}'$ u točku T i označimo s $\Delta\varphi$ kut između ortova $\vec{t_o}$ i $\vec{t_o}'$.

Zakrivljenost prostorne krivulje u njenoj točki $T(s) =$

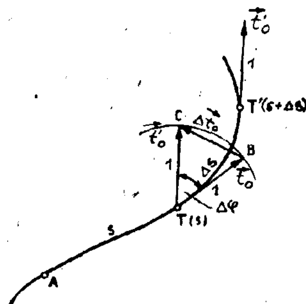
$$= K = \lim_{\Delta s \to o} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \qquad \text{(a)}$$

Iz slike vidimo, da je vektor

$$\vec{BC} = \vec{t_o}' - \vec{t_o} = \Delta\vec{t_o}$$

U drugu ruku, spojivši točke B i C lukom kružnice, kojoj je središte u T, a polumjer 1, dobijemo

$$\widehat{BC} = 1 \cdot \Delta\varphi = \Delta\varphi \qquad \text{(b)}$$



Sl. 156

Pomnoživši u izrazu (a) za zakrivljenost K brojnik i nazivnik s $|\Delta\vec{t_o}|$

$$K = \lim_{\Delta s \to o} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim \frac{\Delta\varphi}{|\Delta\vec{t_o}|} \cdot \frac{|\Delta\vec{t_o}|}{\Delta s}$$

i uzevši u obzir, da je prema (b) $\Delta\varphi = \widehat{BC}$, a $|\Delta\vec{t_o}| =$ tetivi BC, dobit ćemo

$$K = \lim_{\Delta s \to o} \frac{\widehat{BC}}{BC} \cdot \frac{|\Delta\vec{t_o}|}{\Delta s} = 1 \cdot \lim_{\Delta s \to o} \frac{|\Delta\vec{t_o}|}{\Delta s} = \left| \frac{d\vec{t_o}}{ds} \right| \qquad \text{(c)}$$

jer je granična vrijednost omjera luka i pripadne tetive jednaka 1:

Uzmemo li u obzir, da je

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}_o$$

jer vektor $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ima smjer tangente na krivulju, a njegova je duljina jednaka 1, kao granična vrijednost omjera duljine tetive i duljine pripadnog luka, kad posljednja teži nuli, i da je $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{t}_o}{ds}$, tada je prema (c) zakrivljenost prostorne krivulje

$$K = \left|\frac{d\vec{t}_o}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \tag{164}$$

Izrazimo apsolutnu vrijednost vektora $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ u skalarnim komponentama. Uzevši u obzir komponente pojedinih vektora

$$\vec{r}\left\{x, y, z\right\} ; \frac{d\vec{r}}{ds}\left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right\} ; \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left\{\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right\} \tag{164a}$$

dobijemo za zakrivljenost K krivulje $\quad x = x(s)$

$$y = y(s)$$

$$z = z(s)$$

u točki $T_0(s_0)$ krivulje formulu:

$$K = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_o^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_o^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_o^2} \tag{164b}$$

pomoću koje računamo zakrivljenost prostorne krivulje u zadanoj točki krivulje.

Recipročna vrijednost zakrivljenosti K daje polumjer zakrivljenosti krivulje u dotičnoj točki:

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_o^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_o^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_o^2}} \tag{164c}$$

Navedimo dva primjera.

1. Odredi zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti cilindričke spirale

$$x = r\cos t \quad ; \quad y = r\sin t \quad ; \quad z = ct$$

u točki spirale parametra t.

Budući da su u formuli (164b) derivacije uzete po parametru s, izračunajmo prema (161) duljinu luka s spirale, koja odgovara parametru t, pa izrazimo parametar t sa s:

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t; \quad \frac{dz}{dt} = c$$

$$s = \int_0^t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2}\, dt = \sqrt{r^2 + c^2} \cdot \Big| t \Big|_0^t = t\sqrt{r^2 + c^2}$$

Odatle

$$t = \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$

Uvrštenje u jednadžbe spirale daje:

$$x = r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}; \quad y = r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}; \quad z = \frac{cs}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$

Sada računamo prema (164b):

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{r}{\sqrt{r^2 + c^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + c^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}; \quad \frac{dz}{ds} = \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$

Odatle

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{r}{r^2 + c^2} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{r}{r^2 + c^2} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

Uvrštenje u (164b) daje:

$$K = \frac{r}{r^2 + c^2} = \text{konstanta}$$

odatle

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{r^2 + c^2}{r} = \text{konstanta}$$

Zakrivljenost cilindričke spirale konstantna je u svim točkama krivulje.

2. Odredi zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti krivulje

$$x = \frac{t^4}{4}; \quad y = \frac{t^3}{3}; \quad z = \frac{t^2}{2}$$

u točki parametra $t_0 = 1$.

Budući da u formulu (164b) ulaze derivacije po duljini luka s, dok je parametar zadane krivulje t, računamo najprije prema (160a)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

Dobijemo:

$$\frac{dx}{dt} = t^3, \quad \frac{dy}{dt} = t^2; \quad \frac{dz}{dt} = t$$

pa je

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{t^6 + t^4 + t^2} = t\sqrt{1 + t^2 + t^4} \tag{a}$$

Kako je $\frac{ds}{dt} \neq 1$, odnosno $ds \neq dt$, bit će i $s \neq t$, pa kako je t funkcija od s, treba parametarske jednadžbe zadane krivulje derivirati po s po pravilu za deriviranje složenih funkcija, uzevši u obzir, da je prema (a)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{t\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$

Dobijemo:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$$

Odatle

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{1 + t^2 + t^4} \cdot 2t - \frac{t^2(2t + 4t^3)}{2\sqrt{1 + t^2 + t^4}}}{1 + t^2 + t^4} \cdot \frac{1}{t\sqrt{1 + t^2 + t^4}} =$$

$$= \frac{2t(2 + 2t^2 + 2t^4 - t^2 - 2t^4)}{2t(1 + t^2 + t^4)^2} = \frac{t^2 + 2}{(1 + t^2 + t^4)^2}$$

a u točki parametra $t_0 = 1$: $\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = \frac{1}{3}$

Na isti način dobijemo:

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 = 0; \qquad \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 = \frac{1}{3}$$

Prema (164b):

Zakrivljenost u točki krivulje $t_0 = 1$: $K = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

Polumjer zakrivljenosti u istoj točki:

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

8. Glavna normala. Binormala. Rektifikaciona ravnina. Osnovni trobrid

Govoreći o oskulacionoj ravnini u nekoj točki T prostorne krivulje, rekli smo, da oskulaciona ravnina sadrži uvijek tangentu povučenu na krivulju u toj točki T. Budući da je normalna ravnina okomita na tangenti, ona je okomita i na oskulacionoj ravnini. Presjek normalne ravnine i oskulacione ravnine zove se glavna normala u dotičnoj točki T prostorne krivulje.

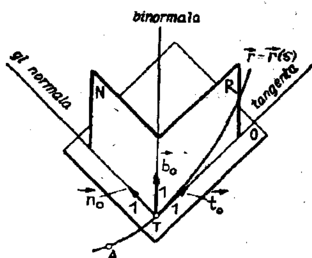
Pravac, koji prolazi zadanom točkom T prostorne krivulje, a okomit je na oskulacionoj ravnini te točke T, leži također u normalnoj ravnini, a zove se binormala prostorne krivulje (vidi sl. 157).

Ravnina, koja prolazi tangentom i binormalom prostorne krivulje, zove se rektifikaciona ravnina.

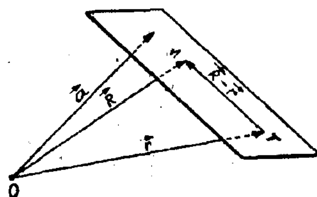
Prema tome, svakoj običnoj točki prostorne krivulje možemo dodijeliti osnovni pravokutni trobrid, kojemu su bridovi tangenta, glavna normala i binormala, dok plohe trobrida čine oskulaciona O, normalna N i rektifikaciona ravnina R (vidi sl. 157).

Kada se točka T giblje po krivulji, premješta se u prostoru i trobrid tako, da se njegov vrh T skliže po krivulji. Pri tom gibanju mijenja se od točke do točke smjer krivulje, ali uzajamni položaj elemenata trobrida ostaje uvijek isti.

Dodijelimo tangenti, glavnoj normali i binormali u nekoj točki T prostorne krivulje $\vec{r} = \vec{r}\,(s)$ jedinične vektore $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$, pri čemu ort tangente $\vec{t}_0$ orijentiramo u smislu povećanja parametra s, ort $\vec{n}_0$ glavne normale usmjerimo prema konkavnoj strani krivulje, a pozitivni smisao orta $\vec{b}_0$ binormale odaberimo tako,



Sl. 157



Sl. 158

da vektori $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$ čine desni pravokutni sustav, drugim riječima, $\vec{b}_0$ orijentiramo obzirom na $\vec{t}_0$ i $\vec{n}_0$ na isti način, kako je koordinatna os Z orijentirana obzirom na osi X i Y.

Prema tome obzirom na definiciju vektorskog produkta i sliku 157 možemo pisati:

$$\vec{t}_0 = \vec{n}_0 \times \vec{b}_0 \quad ; \quad \vec{b}_0 = \vec{t}_0 \times \vec{n}_0 \quad ; \quad \vec{n}_0 = \vec{b}_0 \times \vec{t}_0 \qquad (165)$$

Napišimo sada vektorske jednadžbe bridova i ploha osnovnog trobrida prostorne krivulje.

U tu svrhu izvedimo općenito jednadžbu ravnine, koja prolazi zadanom točkom T, a okomita je na zadanom vektoru $\vec{a}$ (sl. 158).

Dodijelivši zadanoj točki T ravnine radijvektor $\vec{r}$, a po volji uzetoj točki M te ravnine radijvektor $\vec{R}$, dobijemo nov vektor $\vec{R} - \vec{r}$. Kako taj vektor leži u ravnini, zadani vektor $\vec{a}$ je okomit na tom vektoru, pa je skalarni produkt

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{a} = 0$$

To je jednadžba tražene ravnine.

Budući da je ort binormale $\vec{b}_0$ okomit na oskulacionoj ravnini, bit će

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{b}_0 = 0$$

jednadžba oskulacione ravnine.

Analogno:

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{t}_0 = 0 \qquad (166)$$

jednadžba normalne ravnine

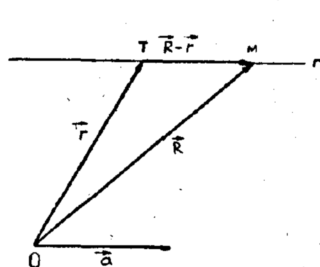
i

$$(\vec{R} - \vec{r})\,\vec{n}_0 = 0$$

jednadžba rektifikacione ravnine

Tu je $\vec{R}$ radijvektor bilo koje točke, a $\vec{r}$ radijvektor zadane točke tih ravnina.

Iste jednadžbe dobivamo za bridove osnovnog trobrida prostorne krivulje, samo mjesto skalarnog produkta ulazi vektorski produkt.



Sl. 159

Neka je $T(\vec{r})$ zadana točka, a $M(\vec{R})$ bilo koja točka na pravcu r, koji je paralelan sa zadanim vektorom $\vec{a}$ (sl. 159).

Tada je vektorski produkt vektora $(\vec{R} - \vec{r})$ i $\vec{a}$ jednak nuli, jer su ti vektori međusobno paralelni, pa je

$$(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{a} = 0$$

jednadžba zadanog pravca r.

Prema tome je

$$(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{t}_0 = 0 \ldots\ldots \text{jednadžba tangente}$$

$$(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{n}_0 = 0 \ldots\ldots \text{jednadžba glavne normale} \qquad (167)$$

$$(\vec{R} - \vec{r}) \times \vec{b}_0 = 0 \ldots\ldots \text{jednadžba binormale.}$$

Pri izvodu formule za zakrivljenost prostorne krivulje $r = r(s)$ došli smo do vektora

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

čija je apsolutna vrijednost u nekoj točki T krivulje jednaka prema formuli (164) zakrivljenosti K krivulje u toj točki T, a formula (164 b) određuje modul toga vek-

tora u skalarnim komponentama. Pokažimo, da se taj vektor podudara s glavnom normalom na krivulju u točki T

Znamo, da je vektor, koji predočuje derivaciju jediničnog vektora, okomit na tom jediničnom vektoru (vida § 2, 8), dakle

$$\frac{d\vec{t_0}}{ds} \perp \vec{t_0}$$

t. j. vektor $\frac{d\vec{t_0}}{ds}$ stoji okomito na tangenti, leži dakle u normalnoj ravnini krivulje.

Pokažimo sada, da taj vektor $\frac{d\vec{t_0}}{ds}$ leži i u oskulacionoj ravnini.

Znamo, da je

$$\frac{d\vec{t_0}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{t_0}}{\Delta s}$$

Iz slike 156 vidimo, da je $\Delta\vec{t_0}$ stranica trokuta TBC, kojemu su druge dvije stranice jedinični vektori tangenata povučenih na krivulju u točkama T i T'. Kad $\Delta s \to 0$, t. j. kad točka T' idući po krivulji teži točki T kao limesu, trokut TBC okreće se oko tangente TB i na granici, kad točka T' dođe u točku T, padne u ravninu oskulacije krivulje, a kako je promjenljivi vektor $\Delta\vec{t_0}$ stranica toga trokuta, ležat će i granična vrijednost vektora $\frac{\Delta\vec{t_0}}{\Delta s}$, t. j. vektor $\frac{d\vec{t_0}}{ds}$ u oskulacionoj ravnini. Vektor $\frac{d\vec{t_0}}{ds}$ leži dakle u normalnoj i u oskulacionoj ravnini, podudara se dakle s presječnicom tih ravnina, pa ima smjer i smisao glavne normale krivulje.

Znamo, da svaki vektor možemo prikazati kao umnožak njegove apsolutne vrijednosti i jediničnog vektora, pa, kako je prema (164) i (164b)

$\left|\frac{d\vec{t_0}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = K = \frac{1}{\rho}$, gdje je K zakrivljenost, a ρ polumjer zakrivljenosti prostorne krivulje $\vec{r} = \vec{r}(s)$, imamo:

$$\frac{d\vec{t_0}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = K \cdot \vec{n_0} = \frac{\vec{n_0}}{\rho} \tag{168}$$

Izrazimo sada u skalarnim komponentama jednadžbe bridova i ravnina osnovnog trobrida prostorne krivulje.

Jednadžbu tangente, a također jednadžbe normalne i oskulacione ravnine već smo prije izveli za prostornu krivulju u točki parametra t_0. Podijelimo li sve nazivnike jednadžbe tangente (156a) s ds, dobijemo

jednadžbu tangente na prostornu krivulju $\vec{r} = \vec{r}(s)$, odnosno $x = x(s)$; $y = y(s)$; $z = z(s)$ u točki T_0 parametra s_0:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{dx}{ds}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{dy}{ds}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{dz}{ds}\right)_0} \tag{169}$$

odatle prema (157)

$$(x - x_0)\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + (z - z_0)\left(\frac{dz}{ds}\right)_0 = 0 \tag{170}$$

jednadžba normalne ravnine u točki $T_0(s_0)$ krivulje.

Na isti način prema (163) dobijemo jednadžbu oskulacione ravnine u točki $T_0(s_0)$ krivulje:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}_0 (x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix}_0 (y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}_0 (z - z_0) = 0 \tag{171}$$

Odatle slijedi jednadžba binormale, kao pravca, koji prolazi istom točkom $T_0(s_0)$, a okomit je na oskulacionoj ravnini:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}_0} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix}_0} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}_0} \tag{172}$$

Vidimo, da formule (171) i (172) možemo lako napisati ciklički permutirajući promjenljive x, y i z.

Da izrazimo i jednadžbu glavne normale u skalarnim komponentama, sjetimo se, da vektor $\frac{d\vec{t}_0}{ds}$ ima smjer i smisao glavne normale i da je prema (168)

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\vec{n}_0}{\rho}$$

Odatle

$$\vec{n}_0 = \rho \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

pri čemu su prema (164a) $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ i $\frac{d^2z}{ds^2}$ komponente vektora $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$.

Budući da su komponente jediničnog vektora njegovi kosinusi smjera, dobijemo jednadžbu glavne normale u točki $T_0(s_0)$:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0} \tag{173}$$

Kako je rektifikaciona ravnina okomita na glavnoj normali, bit će

$$(x - x_0)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 + (z - z_0)\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 = 0 \tag{174}$$

jednadžba rektifikacione ravnine u točki $T_0(s_0)$.

Primjedba

Iz načina, kako smo došli do jednadžbi (169) do (174) slijedi, da u jednadžbama (169) do (172) uklj. možemo derivacije po parametru s zamijeniti derivacijama po parametru t, dok pri primjeni formula (173) i (174) treba derivirati po luku s krivulje.

Navedimo primjer.

Odredi jednadžbe bridova osnovnog trobrida krivulje

$$x = \frac{1}{2}\sin^2 t; \quad y = \frac{1}{2}(t + \sin t \cdot \cos t); \quad z = \sin t$$

u točki krivulje parametra $t = t_0$.

Prema (156), odnosno (169) računamo jednadžbu tangente:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \sin t_0 \cdot \cos t_0; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 t_0 + \cos^2 t_0) = \cos^2 t_0$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \cos t_0 \tag{a}$$

pa je

$$\frac{x - x_0}{\sin t_0} = \frac{y - y_0}{\cos t_0} = \frac{z - z_0}{1}$$

tražena jednadžba tangente.

Prema (172) zamijenivši s s t računamo jednadžbu binormale:

Prema (a): $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = \cos 2t_0$; $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 = -\sin 2t_0$; $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 = -\sin t_0$

pa je nakon uređenja

$$\frac{x - x_0}{\sin t_0} = \frac{y - y_0}{\cos t_0} = \frac{z - z_0}{-1}$$

tražena jednadžba binormale.

Da dobijemo jednadžbu glavne normale prema (173), moramo prijeći na parametar s.

Prema (160) i (a) dobivamo

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t + \cos^4 t + \cos^2 t}$$

ili nakon uređenja

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2} \cdot \cos t, \quad \text{a odatle je} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \cos t}$$

Računamo:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{2} \cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}; \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\cos t}{2 \cdot \cos t} = \frac{1}{2}; \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{\sin t}{2 \cos t}; \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = 0$$

Odatle u točki krivulje parametra $t = t_0$

$$\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)_0 = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)_0 = -\frac{\sin t_0}{2 \cos t_0}; \quad \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)_0 = 0$$

Uvrstimo li te vrijednosti u (173) i pomnožimo li sve nazivnike tako dobivenog izraza s $2 \cos t_0$, dobijemo traženu jednadžbu glavne normale

$$\frac{x - x_0}{\cos t_0} = \frac{y - y_0}{-\sin t_0} = \frac{z - z_0}{0}$$

Odredi jednadžbe ploha osnovnog trobrida krivulje

$$x = \frac{t}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{t}{\sqrt{2}}; \quad z = \ln \sin t$$

u točki parametra $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\left[x - y = 0 \; ; \; z = 0 \; ; \; x + y = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right]$$

9. Torzija prostorne krivulje

Rekli smo već, da prostorna krivulja ima zakrivljenost, koja se ni u čemu ne razlikuje od zakrivljenosti ravne krivulje, a karakterizira brzinu promjene smjera krivulje, odosno brzinu, kojom se mijenja otklon krivulje od pravca (tangente).

Međutim, prostorna krivulja, koja se ne da smjestiti ni u jednoj ravnini, ima još i drugu zakrivljenost — torziju, koja pokazuje brzinu, kojom se mijenja otklon krivulje od ravnine i to od oskulacione ravnine, jer od svih ravnina, koje prolaze zadanom točkom krivulje, najviše se priljubljuje krivulji ravnina oskulacije.

Znamo, da se kut dviju ravnina mjeri kutom njihovih normala, a kako binormale stoje okomito na ravninama oskulacije dotičnih točaka prostorne krivulje, torzija se mjeri promjenom smjera binormale. Prema tome postupajući na slični način, kako i pri definiciji zakrivljenosti, dobivamo:

torzija krivulje $\vec{r} = \vec{r}(s)$ u točki $T(s)$

$$\tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s} = \frac{d\psi}{ds} \tag{a}$$

gdje je ψ kut, što ga čine jedinični vektori $\vec{b}_0$ i $\vec{b'}_0$ binormala povučenih u zadanoj točki T krivulje i u nekoj susjednoj točki T'.

Kako je oskulaciona ravnina ravne krivulje ona ravnina, u kojoj leži sama krivulja, torzija ravne krivulje jednaka je nuli, jer su binormale u svim točkama ravne krivulje međusobno paralelne, pa je $\Delta\psi = 0$. Dvije zakrivljenosti imaju dakle samo prostorne krivulje, čije točke ne leže u jednoj ravnini, pa se stoga zovu krivulje dvostruke zakrivljenosti.

Na način posve sličan onome, koji smo primijenili pri izvodu formule za zakrivljenost K, dobivamo:

$$\text{torzija} \quad \tau = \frac{d\psi}{ds} = \left| \frac{d\vec{b}_0}{ds} \right| \tag{175}$$

Da dobijemo drugi izraz za torziju τ, sjetimo se, da je prema (165)

$$\vec{b}_0 = \vec{t}_0 \times \vec{n}_0$$

pa taj vektorski produkt derivirajmo po s prema formuli (35):

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = \vec{t}_0 \times \frac{d\vec{n}_0}{ds} - \vec{n}_0 \frac{d\vec{t}_0}{ds} = \text{prema (168)} = \vec{t}_0 \times \frac{d\vec{n}_0}{ds} - \vec{n}_0 \times \frac{\vec{n}_0}{\rho} =$$

$$= \text{prema (24)} = \vec{t}_0 \times \frac{d\vec{n}_0}{ds}$$

Znamo, da vektor, koji predočuje derivaciju jediničnog vektora, stoji okomito na tom jediničnom vektoru, dakle vektor $\frac{d\vec{b}_0}{ds}$ okomit je na $\vec{b}_0$, t. j. na binormali.

Znamo također, da vektorski produkt $\frac{d\vec{b}_0}{ds}$ stoji okomito na jednom i na drugom faktoru, t. j. na $\vec{t}_0$ i na $\frac{d\vec{n}_0}{ds}$, dakle vektor $\frac{d\vec{b}_0}{ds}$ je okomit i na tangenti. Budući da

je vektor $\frac{d\vec{b}_0}{dt}$ okomit i na binormali i na tangenti, on se podudara, kako se to vidi iz slike 157, s glavnom normalom krivulje u dotičnoj točki krivulje, pa je

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = \left|\frac{d\vec{b}_0}{ds}\right| \cdot \vec{n}_0$$

ili prema (175)

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = \pm\, \tau \cdot \vec{n}_0$$

Dvostruki predznak u posljednoj formuli tumači se time, što vektor $\frac{d\vec{b}_0}{ds}$ može imati isti ili suprotni smisao od vektora $\vec{n}_0$.

Dok se zakrivljenost prostorne krivulje uvijek uzima po svojoj apsolutnoj vrijednosti, torzija se smatra pozitivnom, ako pri pomaku duž krivulje vrtnja binormale biva na desno obzirom na jedinični vektor $\vec{t}_0$ tangente.

Obično se posljednja formula piše s predznakom minus:

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\tau \cdot \vec{n}_0 \tag{176}$$

Uvedemo li polumjer torzije ρ_1 kao recipročnu vrijednost torzije τ, t. j. $\rho_1 = \frac{1}{\tau}$, tada formula (176) prima oblik:

$$\frac{d\vec{b}_0}{dt} = -\frac{\vec{n}_0}{\rho_1} \tag{176a}$$

Pomoću treće Frenet-ove formule [vidi dalje (178)] možemo izraziti torziju τ u točki $T_0(s_0)$ krivulje pomoću skalarnih komponenata vektora $\frac{d\vec{r}}{ds}$, $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ i $\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}$:

$$\tau = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0^2} \tag{177}$$

Kako vidimo, u većini jednadžbi elemenata prostorne krivulje derivacije su uzete po duljini s prostorne krivulje. Uzmemo li za parametar neku drugu veličinu, dobit ćemo mnogo kompliciranije formule.

Navedimo primjer.

Treba izračunati torziju krivulje

$$x = e^t \sin t; \quad y = e^t \cos t; \quad z = e^t$$

u bilo kojoj točki krivulje parametra t.

Prema (160) računamo $\frac{ds}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t + \sin t); \qquad \frac{dy}{dt} = e^t(\cos t - \sin t); \qquad \frac{dz}{dt} = e^t$$

$$\frac{ds}{dt} = e^t\sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 1} = e^t\sqrt{3}$$

Odatle
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{e^t\sqrt{3}}$$

Sada računamo prema (177):

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}}; \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{e^t\sqrt{3}} = \frac{\cos t - \sin t}{3e^t}; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\sin t + \cos t}{3e^t}; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{-2\cos t}{3e^t}\cdot\frac{1}{e^t\sqrt{3}} = -\frac{2\cos t}{3e^{2t}\sqrt{3}}; \quad \frac{d^3y}{ds^3} = \frac{2\sin t}{3e^{2t}\sqrt{3}}; \quad \frac{d^3z}{ds^3} = 0$$

Uvrštenje u (177) daje:

Brojnik =

$$= \begin{vmatrix} \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{3}} & \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\cos t - \sin t}{3e^t} & -\frac{\sin t + \cos t}{3e^t} & 0 \\ -\frac{2\cos t}{3e^{2t}\sqrt{3}} & \frac{2\sin t}{3e^{2t}\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin t \cos t - \sin^2 t - \sin t \cos t - \cos^2 t}{9\, e^{3t} \sqrt{3}} = -\frac{2}{27\, e^{3t}}$$

$$\text{Nazivnik} = \frac{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}{9\, e^{2t}} = \frac{2}{9 e^{2t}}$$

Odatle

$$\tau = \frac{1}{3\, e^{t}}$$

Izračunaj:

1. Torziju i polumjer torzije cilindričke spirale

$$x = r \cos t; \quad y = r \sin t; \quad z = c\, t$$

u točki parametra t.

$$\left[\tau = \frac{c}{r^2 + c^2} = \text{konstanta, vidi primjer 1. na str. 318.}\right]$$

2. Zakrivljenost i torziju za krivulju

$$x = t; \quad y = a; \quad z = \ln(\cos t)$$

$$[K = \cos t; \quad \tau = 0]$$

u točki parametra t.

3. Polumjere zakrivljenosti i torzije krivulje

$$x = \frac{1}{2} \sin^2 t\ ; \quad y = \frac{1}{2}(t + \sin t \cdot \cos t); \quad z = \sin t$$

u točki parametra t.

$$[\rho = 2 \cos t; \quad \rho_1 = 2 \cos t]$$

4. Zakrivljenost krivulje

$$x = e^t; \quad y = e^{-t}; \quad z = t\sqrt{2}$$

u točki parametra t.

$$\left[K = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}\right]$$

10. Frenet-ove formule

Frenet-ove formule izražavaju odnose između derivacija jediničnih vektora tangente, binormale i glavne normale, uzetih po duljini luka s prostorne krivulje, i polumjera zakrivljenosti i torzije u dotičnoj točki te krivulje.

Prve dvije Frenet-ove formule već smo izveli promatrajući zakrivljenost i torziju prostorne krivulje $\vec{r} = \vec{r}(s)$ u nekoj točki T parametra s.

To su formule (168) i (176a):

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{\vec{n}_0}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\frac{\vec{n}_0}{\rho_1} \qquad \text{(a)}$$

Da dobijemo treću Frenet-ovu formulu, derivirajmo po s jedinični vektor glavne normale $\vec{n}_0$, koji možemo prema (165) napisati u obliku

$$\vec{n}_0 = \vec{b}_0 \times \vec{t}_0$$

Prema (35):

$$\frac{d\vec{n}_0}{ds} = \vec{b}_0 \times \frac{d\vec{t}_0}{ds} + \frac{d\vec{b}_0}{ds} \times \vec{t}_0 = \text{prema (a)} =$$

$$= \vec{b}_0 \times \frac{\vec{n}_0}{\rho} - \frac{\vec{n}_0}{\rho_1} \times \vec{t}_0 = \frac{1}{\rho}(\vec{b}_0 \times \vec{n}_0) - \frac{1}{\rho_1}(\vec{n}_0 \times \vec{t}_0) =$$

$$= \text{prema (165)} = -\frac{1}{\rho}\vec{t}_0 + \frac{1}{\rho_1}\vec{b}_0$$

Time smo dobili i treću Frenet-ovu formulu.

Frenet-ove formule glasi dakle:

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{\vec{n}_0}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\frac{\vec{n}_0}{\rho_1} \qquad (178)$$

$$\frac{d\vec{n}_0}{ds} = -\frac{\vec{t}_0}{\rho} + \frac{\vec{b}_0}{\rho_1}$$

gdje je ρ polumjer zakrivljenosti, a ρ_1 polumjer torzije u dotičnoj točki prostorne krivulje.

Uzmemo li u obzir, da skalarne veličine $\frac{1}{\rho}$ i $\frac{1}{\rho_1}$ predočuju zakrivljenost K, odnosno torziju τ prostorne krivulje, tada Frenet-ove formule primaju oblik:

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = K\vec{n}_0$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\tau\vec{n}_0 \qquad (178a)$$

$$\frac{d\vec{n}_0}{ds} = -K\vec{t}_0 + \tau\vec{b}_0$$

Frenet-ove formule prikazuju usku vezu između zakona promjene glavnih smjerova prostorne krivulje, njene zakrivljenosti i torzije.

§ 10. LINIJSKI (KRIVULJNI) INTEGRALI

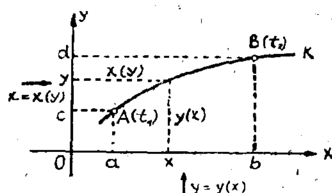
Dosada je kao područje integracije služio odrezak koordinatne osi ili dio ravnine ili dio prostora. Sada će područje integracije biti linija, t. j. pravac ili poligon ili krivulja u ravnini ili prostoru. Takvi se integrali zovu linijski ili krivuljni.

Prema tome, da li je ta linija ravna ili prostorna, promotrit ćemo posebno linijske integrale u ravnini i u prostoru.

1. Linijski integrali po ravnoj krivulji

Govoreći o računanju integrala linearnog diferencijalnog izraza $P(x, y)dx + Q(x,y)dy$, gdje su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekinute funkcije u nekom području σ ravnine XY, pokazali smo, da $\int Pdx + Qdx$ možemo izračunati samo u tom slučaju, ako taj diferencijalni izraz predočuje totalni diferencijal neke funkcije $z = z(x, y)$, t. j. ako je ispunjen uvjet integrabilnosti $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (vidi § 7), pri čemu smo pretpostavili, da su x i y nezavisne promjenljive neovisne jedna o drugoj. Međutim, ako je zadana veza između x i y u obliku funkcije $y = y(x)$, odnosno inverzne funkcije $x = x(y)$, koja leži u području σ definicije funkcija P i Q, tada $\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ možemo izračunati bez obzira, da li je ispunjen ili nije ispunjen uvjet integrabilnosti $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Kako funkcija $y=y(x)$, odnosno $x=x(y)$ predočuje krivulju u ravnini XY, prelazi u tom slučaju $\int Pdx + Qdy$ u linijski ili krivuljni integral uzet po toj krivulji $y = y(x)$.

Pretpostavimo, da je krivulja k grafički prikaz funkcije $y = y(x)$, kojom je zadana veza između x i y, i da ta krivulja leži u području σ ravnine XY, u kojem su definirane obje funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, pa tražimo krivuljni integral od $Pdx + Qdy$ uzduž te krivulje k od točke A do točke B, to jest tražimo:



Sl. 160.

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(vidi sl. 160).

Iz slike vidimo, da kad integriramo po x, y nije više bilo koji, nego je ordinata y krivulje $y = y(x)$ i da se x mijenja od a do b, a kad integriramo po y, x je ordinata krivulje $x = x(y)$ i da se mijenja od c do d.

Prema tome dobijemo:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P[x, y(x)]dx + \int_c^d Q[x(y), y]\, dy \qquad (179)$$

Iz te formule vidimo, da se krivuljni integrali računaju tako, da se u prvu funkciju $P(x, y)$ uvrsti $y = y(x)$, a u drugu funkciju $x = x(y)$. Na taj način dobiju se dva obična određena integrala, jer prvi integral sadrži funkciju od samoga x, a drugi integral funkciju od samoga y.

Napišemo li jednadžbu krivulje, po kojoj se vrši integriranje, u parametarskom obliku, svest ćemo krivuljni integral na jedan obični.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right| \quad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

Kako je u tom slučaju

$$dx = x'(t)dt$$

$$dy = y'(t)dt$$

krivuljni integral prima oblik:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t)] \cdot x'(t) + Q[x(t), y(t)] \cdot y'(t)\} \, dt \tag{180}$$

Krivulja, po kojoj se vrši integriranje, mora biti orijentirana, t. j. mora biti zadan smisao obilaženja krivulje. Promijenimo li smisao obilaženja na protivni, krivuljni integral mijenja predznak.

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\widehat{BA}} Pdx + Qdy$$

Vrši li se integriranje po zatvorenoj krivulji K, tada se put integriranja smatra pozitivnim, ako obilazimo krivulju protiv kazaljke na satu, t. j. tako, da površina, koju omeđuje ta krivulja, bude na lijevo. Pri protivnom smislu obilaženja krivulje, put integriranja smatra se negativnim (obilaženje u smislu kazaljke na satu, površina desno):

$$\oint_{+K} Pdx + Qdy = -\oint_{-K} Pdx + Qdy$$

Primjeri

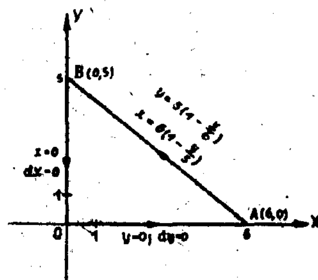
1. Izračunaj

$$\oint_{+K} (x - 2y + 5)dx + (3x - 4y - 7)dy$$

gdje je k kontura trokuta OAB prikazanog na sl. 161.

Napišimo jednadžbu pravca AB:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$$



Sl. 161

Odatle

$$y = 5\left(1 - \frac{x}{6}\right) = y(x)$$

$$x = 6\left(1 - \frac{y}{5}\right) = x(y) \qquad \text{(a)}$$

Prema slici:

$$\oint_{+K} = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BO}} \qquad \text{(b)}$$

Računamo prema (179):

$$\int_{\overline{OA}} (x - 2y + 5)\,dx + (3x - 4y - 7)\,dy = (\text{idemo po osi } X\text{, dakle je } y = 0 \text{ i } dy = 0) =$$

$$= \int_0^6 (x - 0 + 5)dx + 0 = \left|\frac{x^2}{2} + 5x\right|_0^6 = 18 + 30 = 48$$

$\int_{\overline{AB}} (x - 2y + 5)dx + (3x - 4y - 7)dy =$ (idemo po pravcu AB, dakle uvrštavamo jednadžbe (a), dok se prema slici x mijenja od 6 do 0, a y od 0 do 5) $=$

$$= \int_6^0 \left[x - 10\left(1 - \frac{x}{6}\right) + 5\right] dx + \int_0^5 \left[18\left(1 - \frac{y}{5}\right) - 4y - 7\right] dy =$$

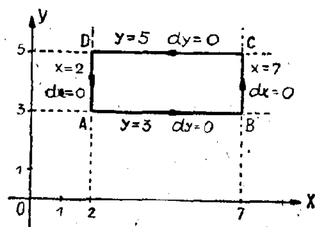
$$= \left|\frac{8}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - 5x\right|_6^0 + \left|11y - \frac{38}{5}\cdot\frac{y^2}{2}\right|_0^5 = -\frac{4}{3}\cdot 36 + 30 + 55 - \frac{19}{5}\cdot 25 = -58$$

$$\int_{\overline{BO}} (x - 2y + 5)dx + (3x - 4y - 7)dy = (\text{idemo po osi } Y\text{, dakle je } x = 0 \text{ i } dx = 0) =$$

$$= 0 + \int_5^0 (-4y - 7)\,dy = \left|-2y^2 - 7y\right|_5^0 = 50 + 35 = 85$$

Prema (b):

$$\oint_{+K} = 48 - 58 + 85 = \underline{75}$$



Sl. 162

2. Izračunaj $\oint_{+K} (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, gdje je k kontura pravokutnika, što ga čine pravci $x = 2$, $y = 3$, $x = 7$, $y = 5$ (sl. 162).

Računamo prema (179) uzevši u obzir, da idući po pravcu $AB : y = 3$, a dakle $dy = 0$, po pravcu $BC : x = 7$, $dx = 0$, po pravcu $CD : y = 5$, $dy = 0$ i po pravcu $DA : x = 2$, $dx = 0$.

$$\oint_{+K}(x^2-y^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DA}}=$$

$$=\int_2^7(x^2-9)\,dx+0+0+\int_3^5(49+y^2)\,dy+\int_7^2(x^2-25)\,dx+0+$$

$$+0+\int_5^3(4+y^2)\,dy=\left|\frac{x^3}{3}-9x\right|_2^7+\left|49y+\frac{y^3}{3}\right|_3^5+\left|\frac{x^3}{3}-25x\right|_7^2+$$

$$+\left|4y+\frac{y^3}{3}\right|_5^3=\frac{343}{3}-63-\frac{8}{3}+18+245+\frac{125}{3}-147-9+\frac{8}{3}-$$

$$-50-\frac{343}{3}+175+12+9-20-\frac{125}{3}=\underline{170}$$

3. Izračunaj $\int\limits_{+K} xy\,dx+(y-x)dy$ po paraboli $k\equiv y^2=x$, odnosno $y=\sqrt{x}$ i to od vrha $O(0,0)$ do točke $A(1,1)$. Nariši sliku!

$$\int\limits_{\widehat{OA}} xy\,dx+(y-x)dy=\text{prema (179)}=\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx+\int_0^1(y-y^2)\,dy=$$

$$=\left|\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_0^1+\left|\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\underline{\frac{17}{30}}$$

4. Izračunaj $\int\limits_{+K}(2r-y)dx+(r-y)dy$, gdje je k prvi luk cikloide računajući od ishodišta O:

$$x=r(t-\sin t)$$
$$y=r(1-\cos t)$$

(vidi Dio II. § 2, primjer 2. i sl. 5).

Izračunavši prema (180)

$$x'=r\,(1-\cos t)$$
$$y'=r\cdot\sin t$$

dobijemo prema toj formuli:

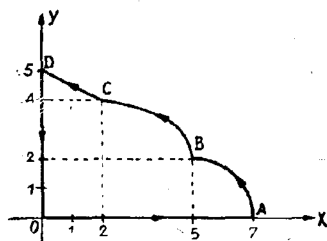
$$\int\limits_{+K}(2r-y)\,dx+(r-y)\,dy=\int_0^{2\pi}\{[2r-r(1-\cos t)]\,r(1-\cos t)+$$

$$+[r-r(1-\cos t)]\,r\sin t\}\,dt=r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t+\sin t\cdot\cos t)\,dt=$$

$$=r^2\left|t-\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}+\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{2\pi}=\underline{r^2\pi}$$

5. Izračunaj $\oint\limits_{+K}(2x - y + 3)dx + (x + 2y - 5)dy$, gdje je krivulja k zadana slikom **163.**

Najprije napišemo jednadžbe pojedinih dijelova zadane konture k i njihove diferencijale, odnosno derivacije:



Sl. 163

$\overline{OA}$: $y = 0$; $dy = 0$.

$\widehat{AB}$: $x = 2\cos t + 5$; $x' = -2\sin t$

$y = 2\sin t$; $y' = 2\cos t$

$\widehat{BC}$: $x = 3\cos t + 2$; $x' = -3\sin t$

$y = 2\sin t + 2$; $y' = 2\cos t$

$\overline{CD}$: $y = -\frac{1}{2}x + 5$; $x = -2y + 10$

$\overline{DO}$: $x = 0$; $dx = 0$

$$\oint\limits_{+K}(2x - y + 3)\,dx + (x + 2y - 5)\,dy = \int\limits_0^7 (2x + 3)\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [-(4\cos t + 10 - 2\sin t + 3)\,2\sin t + (2\cos t + 5 + 4\sin t - 5)\cdot 2\cos t]\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [-(6\cos t + 4 - 2\sin t - 2 + 3)3\sin t + (3\cos t + 2 + 4\sin t + 4 -$$

$$- 5)2\cos t]\,dt + \int\limits_2^0 (2x + \frac{1}{2}x - 5 + 3)\,dx + \int\limits_4^5 (-2y + 10 + 2y - 5)dy +$$

$$+ \int\limits_5^0 (2y - 5)dy = \Big|x^2 + 3x\Big|_0^7 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-13\sin t + 2)\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-10\sin t\cos t - 15\sin t + 2\cos t + 6)dt + \Big|\frac{5}{4}x^2 - 2x\Big|_2^0 +$$

$$+ \Big|5y\Big|_4^5 + \Big|y^2 - 5y\Big|_5^0 = 70 + 2\Big|13\cos t + 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \Big|-5\sin^2 t + 15\cos t + 2\sin t + 6t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 5 =$$

$$= 74 + 2(\pi - 13) + (-5 + 2 + 3\pi - 15) = \underline{30 + 5\pi}$$

6. $\oint\limits_{+K}\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$, gdje je k kružnica polumjera r, u pozitivnom smislu.

Prelazimo na parametarsku jednadžbu zadane kružnice:

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

Odatle

$$dx = -r\sin t\,dt$$
$$dy = r\cos t\,dt$$

pa prema (180) imamo:

$$\oint_{+K} = \int_0^{2\pi} \frac{-r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t}{r^2}\,dt = -\left| dt \right|_0^{2\pi} = \underline{-2\pi}$$

Izračunaj

1. $\oint_{+K} y\,dx - x\,dy$, gdje je k elipsa s poluosima a i b, u pozitivnom smislu.

$$[-2\pi ab]$$

2. $$\int_K x\,y\,dx + (y - x)dy \quad \text{od} \quad A(0, 0) \text{ do } B(1, 1)$$

po

$$a)\ y = x$$
$$b)\ y = x^2$$
$$c)\ y = x^3$$

$$\left[\frac{1}{3};\ \frac{1}{12};\ -\frac{1}{20}\right]$$

3. $\int_{+K} (2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy$, gdje je k kontura trokuta ABC, kojemu su vrhovi $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 4)$. [0]

Ako je u krivuljnom integralu $\int_{+K} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ prva funkcija $P(x, y)$ ili druga funkcija $Q(x, y)$ jednaka nuli, krivuljni integral prima oblik

$$\int_{+K} P(x, y)dx, \quad \text{odnosno} \quad \int_{+K} Q(x, y)dy$$

Ti integrali rješavaju se na isti gore navedeni način.

Navedimo dva primjera.

1. Izračunaj $\int_K (x^2 - y^2)dx$, gdje je k luk parabole $y = x^2$ od točke $x = 0$ do točke $x = 2$.

Uvrstimo $y = x^2$ u integral:

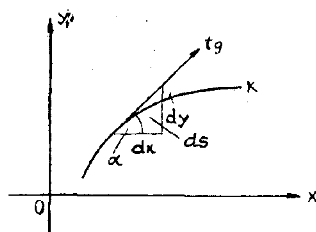
$$\int_K (x^2 - y^2)dx = \int_0^2 (x^2 - x^4)dx = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{32}{5} = \underline{-3\frac{11}{15}}$$

2. Izračunaj $\oint_{+K}(x^2 + y^2)dy$, gdje je k kontura pravokutnika, što ga čine pravci $x = 1$, $y = 1$, $x = 3$ i $y = 5$ u pozitivnom smislu (nariši sliku).

$$\oint_{+K}(x^2 + y^2)\,dy = 0 + \int_1^5 (9 + y^2)\,dy + 0 + \int_5^1 (1 + y^2)\,dy =$$

$$= \left| 9y + \frac{y^3}{3}\right|_1^5 + \left| y + \frac{y^3}{3}\right|_5^1 = 45 + \frac{125}{3} - 9 - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - 5 - \frac{125}{3} = \underline{32}$$

Integrale $\int P(x, y)\,dx$ i $\int Q(x, y)\,dy$, koji su uzeti po koordinatama x i y, možemo lako pretvoriti u integrale po duljini s krivulje k.



Sl. 164

Prema slici 164 imamo:

$$dx = ds \cdot \cos\alpha$$

$$dy = ds \cdot \sin\alpha$$

gdje je α kut između tangente na orijentiranu krivulju i osi X, pri čemu se kut α mijenja od 0 do 2π.

Uvrštenje u integrale daje:

$$\int_K P(x, y)\,dx = \int_K P(x, y)\cos\alpha\,ds$$

$$\int_K Q(x, y)\,dy = \int_K Q(x, y)\sin\alpha\,ds \qquad (184)$$

ili, ako označimo:

$$P(x, y)\cos\alpha = f(x, y)$$

$$Q(x, y)\sin\alpha = \varphi(x, y)$$

krivuljni integrali po duljini krivulje primaju oblik:

$$\int_K f(x, y)\,ds, \quad \text{odnosno} \quad \int_K \varphi(x, y)\,ds$$

Krivuljni integrali uzeti po duljini krivulje računaju se obično tako, da se jednadžba krivulje napiše u parametarskom obliku, pa se na taj način pretvaraju u obične određene integrale.

Uvrštenje

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right| \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \qquad \text{[vidi Dio II, formula (87)]}$$

u krivuljni integral daje:

$$\int_K f(x, y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \qquad (182)$$

Primjer

$\int_K xy\, ds$, gdje je k kvadrant elipse poluosiju a i b, koji leži u prvom kvadrantu

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

Računamo prema (182):

$$x' = -a \sin t$$

$$y' = b \cos t$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

$$\int_K xy\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t}\, dt$$

Pomoću supstitucije $\sin^2 t = u$ svodimo integral na tip II (vidi Dio II. § 5, 7), pa nakon integriranja dobijemo:

$$\int_K x y\, ds = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left| \sqrt{[b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t]^3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left[\sqrt{(b^2 + a^2 - b^2)^3} - \sqrt{b^6} \right] =$$

$$= \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

Krivuljni integral po duljini krivulje možemo naravno riješiti i bez prijelaza na parametarsku jednadžbu krivulje uvrstivši u krivuljni integral

$$y = y(x)$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \qquad \text{[Vidi Dio II. formula (86)]}$$

U tom slučaju krivuljni integral računamo po formuli:

$$\int_K f(x, y)ds = \int_K f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \qquad (183)$$

Primjer

$\int_K \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, gdje je k odrezak pravca $y = \frac{1}{2}x - 2$ od $A(0, -2)$ do $B(4, 0)$.

Računamo prema (183):

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$y^2 = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$$

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{4}x^2 - 2x + 4 = \frac{5}{4}\left(x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\int_K \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot dx =$$

$$= \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}}} = \text{prema predtipu B (vidi Dio II. § 5, 6)} =$$

$$= \left| \ln\left(x - \frac{4}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}}\right) \right|_0^4 =$$

$$= \ln\left(4 - \frac{4}{5} + \frac{8}{\sqrt{5}}\right) - \ln\left(-\frac{4}{5} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \ln\frac{16\sqrt{5} + 40}{20 - 4\sqrt{5}} = \ln\frac{4\sqrt{5} + 10}{5 - \sqrt{5}} = \ln\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$$

Geometrijski možemo krivuljni integral po duljini ravne krivulje $\int_K f(x, y)\,ds$ shvatiti kao plašt valjkaste plohe, kojoj su izvodnice okomite na ravnini XY. Ta valjkasta ploha siječe ravninu XY u krivulji k, po kojoj se vrši integriranje, a presječena je plohom $f(x, y)$ tako, da duljine izvodnica imaju u svakoj točki vrijednost podintegralne funkcije $f(x, y)$, koja pripada dotičnoj točki.

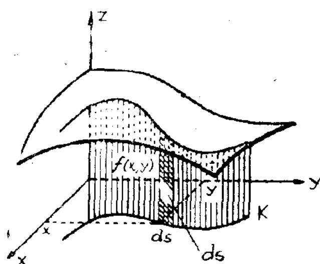
Slika 165 jasno prikazuje gore navedeno. Prema toj slici

$$dS = f(x, y) \cdot ds$$

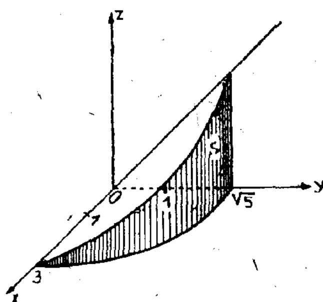
a odatle je

plašt $$S = \int_K f(x, y)ds$$

a to je krivuljni integral po duljini krivulje k.



Sl. 165



Sl. 166

Primjer

Izračunaj plašt jednog oktanta eliptičnog valjka $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, koji je presiječen ravninom $z = x$ (sl. 166).

$$S = \int_K f(x, y)ds$$

Računamo prema (182) uzevši u obzir, da je $f(x, y) = z = x$ i napisavši jednadžbu elipse u parametarskom obliku:

$$x = 3\cos t$$

$$y = \sqrt{5}\sin t$$

Odatle

$$x' = -3\sin t$$

$$y' = \sqrt{5}\cos t$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\sqrt{9\sin^2 t + 5\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{4\sin^2 t + 5}\,dt$$

Uz substituciju $\sin t = u$ i uzevši u obzir, da je $u = 0$ za $t = 0$ i $u = 1$ za $t = \frac{\pi}{2}$, dobivamo:

$$S = 3\int_0^1 \sqrt{4u^2 + 5}\cdot du = 6\int_0^1 \sqrt{u^2 + \frac{5}{4}}\,du =$$ prema predtipu C (Dio II. § 5, 6) =

$$= 6\left|\frac{u}{2}\sqrt{u^2+\frac{5}{4}}+\frac{5}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{5}{4}}\right)\right|_0^1 =$$

$$= 6\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{8}\ln\left(1+\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{8}\ln\sqrt{\frac{5}{4}}\right] =$$

$$= 6\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\ln\frac{5}{2}-\frac{5}{8}\ln\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\ln 5-\frac{5}{8}\ln 2-\frac{5}{16}\ln 5+\frac{5}{8}\ln 2\right) =$$

$$= 6\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{16}\ln 5\right) = \underline{\frac{9}{2}+\frac{15}{8}\ln 5}$$

Spomenimo još fizikalno značenje krivuljnog integrala.

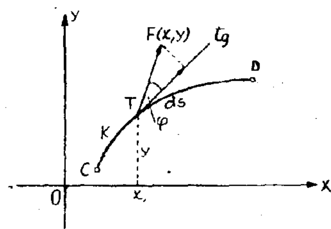
Pretpostavimo, da se materijalna točka giblje po krivulji k od točke C do točke D krivulje i neka na tu točku djeluje sila F, koja se mijenja po veličini i po smjeru (sl. 167). Sila F je, dakle, funkcija točke $T(x, y)$ krivulje k, t. j. $F = F(x, y)$.

Isto tako i smjer sile F, koji se mijenja od točke do točke, ovisi o položaju točke T na krivulji, t. j. kut φ, što ga sila F zatvara sa smjerom gibanja (tangentom tg), također je funkcija od x, y: $\varphi = \varphi(x, y)$.

Znamo, da je radnja jednaka umnošku projekcije sile u smjer gibanja i prevaljenog puta. Prema tome radnja, što je vrši sila $F(x, y)$ na putu ds, iznosi, kako se vidi iz slike 167,

$$dA = F(x, y)\cos\varphi\, ds$$

a čitavu radnju na putu od točke C do točke D krivulje dobijemo integrirajući po duljini krivulje od točke C do točke D:



Sl. 167

$$A = \int_C^D F(x, y)\cos\varphi\, ds$$

ili, ako integrand $F(x, y)\cdot\cos\varphi$ označimo s $f(x, y)$, dobijemo

$$\text{Radnja } A = \int_C^D f(x, y)\,ds$$

a to je krivuljni integral uzet po duljini krivulje k.

Kasnije ćemo pokazati, da i izraz $\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ možemo shvatiti kao radnju, što je vrši materijalna točka pri gibanju po krivulji k u polju sila, koje se nalazi u ravnini XY (vidi § 13, 4).

Kao daljnju primjenu krivuljnih integrala možemo navesti proračunavanje kružnih procesa u termodinamici (v. Bošnjaković: Nauka o toplini I).

2. Linijski integrali po prostornoj krivulji

Sve što smo rekli o integriranju ravnog linearnog diferencijalnog izraza $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ možemo ponoviti i za integriranje prostornog linearnog diferencijalnog izraza

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

gdje su P, Q i R neprekinute funkcije u nekom dijelu prostora.

$\int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ možemo izračunati bez obzira na to, da li su ispunjeni uvjeti integrabilnosti (149), t. j. i u tom slučaju, kad $Pdx + Qdy + Rdz$ nije totalni diferencijal, ali je zadana veza između nezavisnih promjenljivih x, y i z, na pr., ako su x, y, z zadani kao neprekinute funkcije jednog parametra t:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Kako gornje tri jednadžbe određuju krivulju k u prostoru (vidi § 9), prelazi $\int Pdx + Qdy + Rdz$ u krivuljni integral uzduž te krivulje k od točke A do točke B krivulje, kojim točkama odgovaraju vrijednosti t_1 i t_2 parametra.

Uvrstimo li u krivuljni integral

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

jednadžbe (a), a također

$$\begin{aligned} dx &= x'(t)dt \\ dy &= y'(t)dt \\ dz &= z'(t)dt \end{aligned}$$

dobijemo obični određeni integral, koji možemo lako izračunati:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t), z(t)] \cdot x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)] \cdot y'(t) + \\ + R[x(t), y(t), z(t)] \cdot z'(t)\}\, dt \qquad (184)$$

Primjeri

1. $\int_K x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)dz$ po odresku pravca od točke $A(1, 1, 1)$ do točke $B(2, 3, 4)$.

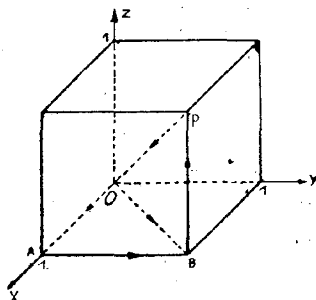
Prema (41) jednadžba pravca AB glasi:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{4-1}$$

ili

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

uzevši x kao parametar, izrazimo y i z s x:



Sl. 168

Odatle

$$y = 2x - 1$$

$$z = 3x - 2$$

$$dy = 2dx$$

$$dz = 3dx$$

Uvrštenje u integral daje

$$\int_{AB} x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz =$$

$$= \int_1^2 [x + (2x-1)\,2 + (x + 2x - 1 - 1)\,3]\,dx =$$

$$= \int_1^2 (14x-8)\,dx = \Big| 7x^2 - 8x \Big|_1^2 = \underline{13}$$

2. $\int y\,dx - (x-y)dy + x\,dz$ po $OABPOB$ (sl. 168).

$$\int_K y\,dx - (x-y)\,dy + x\,dz = \int_{OABPOB} = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BP} + \int_{PO} + \int_{OB}$$

$$\int_{OA} = (y=0\ ;\ dy=0\ ;\ z=0\ ;\ dz=0) = \int_0^1 0\cdot dx = 0$$

$$\int_{AB} = (x=1\ ;\ dx=0\ ;\ ;\ z=0\ ;\ dz=0) =$$

$$= \int_0^1 [-(1-y)]\,dy = \Big| -y + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{BP} = (x=1\ ;\ dx=0\ ;\ y=1\ ;\ dy=0) = \int_0^1 1\cdot dz = \big| z \big|_0^1 = 1$$

Jednadžba pravca OP prema (41):

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

pa je

$$y = x \quad ; \quad dy = dx$$
$$z = x \quad ; \quad dz = dx$$

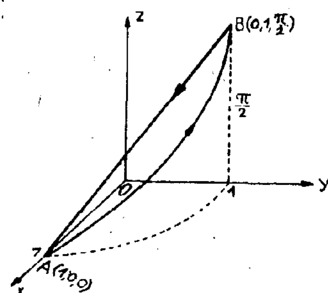
$$\int_{\overline{PO}} = \int_1^0 (x + x)\, dx = \left| x^2 \right|_1^0 = -1$$

$$\int_{\overline{OB}} = (x = y \ ; \ dx = dy \ ; \ z = 0 \ ; \ dz = 0) = \int_0^1 x\, dx = \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{AOBPOB} = 0 - \frac{1}{2} + 1 - 1 + \frac{1}{2} = \underline{0}$$

3. $\oint_K (x + 3)\, dx + (y - 1)\, dy + (2z + 2)\, dz$, gdje je k luk cilindričke spirale od točke $A(1, 0, 0)$ do točke $B\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$ i pravac BA (sl. 169).

$$\oint_K = \int_{\widehat{AB}} + \int_{\overline{BA}}$$



Sl. 169

Uzevši u obzir, da je $r = 1$, jednadžba spirale prema (155) glasi:

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$z = c\, t$$

Kako je za $t = \frac{\pi}{2}$ i $z = \frac{\pi}{2}$ (slika), imamo

$$c = \frac{z}{t} = 1$$

pa je $\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= t \end{aligned}\right|$ jednadžba zadane spirale.

Odatle

$$x' = -\sin t$$
$$y' = \cos t$$
$$z' = 1$$

Prema (184) imamo:

$$\int_{\widehat{AB}} (x + 3)\, dx + (y - 1)\, dy + (2z + 2)\, dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-(\cos t + 3) \sin t + (\sin t - 1) \cos t + (2t + 2)]\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3 \sin t - \cos t + 2t + 2)\, dt =$$

$$= \left| 3\cos t - \sin t + t^2 + 2t \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{\pi^2}{4} + \pi - 3 = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 4$$

Jednadžba pravca BA:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\frac{\pi}{2}}$$

Odatle
$$y = -x + 1 \quad ; \quad dy = -dx$$

$$z = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} \quad ; \quad dz = -\frac{\pi}{2}\,dx$$

$$\int_{BA} = \int_0^1 \left[(x + 3) - (-x + 1 - 1) - (-\pi x + \pi + 2)\frac{\pi}{2}\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right) x + \left(3 - \frac{\pi^2}{2} - \pi\right)\right] dx =$$

$$= \left| \left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right) \frac{x^2}{2} + \left(3 - \frac{\pi^2}{2} - \pi\right) x \right|_0^1 = 1 + \frac{\pi^2}{4} + 3 - \frac{\pi^2}{2} - \pi = -\frac{\pi^2}{4} - \pi + 4$$

$$\oint_K = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 4 - \frac{\pi^2}{4} - \pi + 4 = \underline{0} .$$

Izračunaj

1. $\int_K yz\,dx + z\sqrt{r^2 - y^2}\,dy + xy\,dz$, gdje je k — luk cilindričke spirale $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ od presjeka krivulje s ravninom $z = 0$ do točke presjeka krivulje s ravninom $z = a$.

[$I = 0$]

2. $\int \frac{x\,dx + y\,dy + 5z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, gdje je k kružnica polumjera r u ravnini XY ($z = 0$).

[$I = 0$]

Kasnije ćemo vidjeti, da i krivuljni integral $\int_K Pdx + Qdy + Rdz$ po prostornoj krivulji k možemo shvatiti kao radnju, koju vrši materijalna točka pri gibanju u prostornom polju sila po toj krivulji k (vidi § 13, 4).

§ 11. PLOŠNI INTEGRALI

Pod plošnim integralom razumijemo integral uzet po površini zadane plohe $z = z(x, y)$.

Govoreći o komplanaciji ploha [vidi § 5, 5. e)], došli smo do najjednostavnijeg oblika tog integrala:

$$\text{površina plohe } S = \iint_S dS = \iint_S 1 \cdot dS$$

Uzmimo sada opći slučaj, kad integrand nije 1, kao u tom specijalnom slučaju, već je neka zadana neprekinuta funkcija $f(x, y, z)$, koja je definirana po površini S zadane plohe $z = z(x, y)$:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS \qquad \text{(a)}$$

Vidimo, da je plošni integral proširenje pojma dvostrukog integrala, slično kao što je krivuljni integral proširenje pojma običnog određenog integrala. U običnom dvostrukom integralu kao područje integracije služi dio jedne koordinatne ravnine, na pr. ravnine XY, dok je kod plošnog integrala područje integracije površina S zadane plohe $z = z(x, y)$.

Kao i pri komplanaciji ploha pretpostavljamo, da je ta ploha neprekinuta i da je svaki pravac, koji je usporedan s osi Z, probada plohu samo u jednoj točki, t. j. da je funkcija $z = z(x, y)$ jednoznačna funkcija. Osim toga moramo sada pretpostaviti, da je ploha o r i j e n t i r a n a. Pri komplanaciji ploha tražili smo apsolutnu vrijednost površine plohe, dok sada moramo uzeti u obzir i predznak plošnog integrala, odnosno plohe, po kojoj integriramo zadanu funkciju $f(x, y, z)$. Orijentacija plohe vrši se pomoću plošne normale, pri čemu se obično uzima, da je normala na plohu usmjerena prema vani, t. j. u konveksnu stranu plohe (vidi sl. 139a), pa pri računanju plošnih integrala funkcije $f(x, y, z)$ uzimamo u obzir predznak kosinusa smjera normale na plohu, po kojoj integriramo.

Računanje integrala po površini zadane plohe, t. j. plošnih integrala oblika (a), vrši se tako, da se zadana ploha S, dakle i element dS te plohe, projicira na jednu koordinatnu ravninu, pa se dS izrazi pomoću svoje projekcije $d\sigma$ na tu ravninu.

Projiciramo li zadanu plohu S na ravninu XY, dobijemo za dS prema slikama (139) poznati nam izraz (130):

$$dS = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} \qquad (130)$$

gdje je γ kut, što ga normala na element plohe dS zatvara s pozitivnim smislom osi Z.

Kako je $\cos\gamma > 0$ za $0 \leqq \gamma < 90°$, odnosno < 0 za $90° < \gamma < 180°$, prima element površine dS pozitivnu, odnosno negativnu vrijednost. Time je provedena orijentacija plohe.

Uzmemo li još u obzir, da kad integriramo po zadanoj plohi $z = z(x, y)$, aplikata z nije bilo koja, nego baš aplikata $z(x, y)$ dotične plohe, plošni integral (a) poprima oblik:

$$I = \iint_{\sigma} f[x, y, z(x, y)] \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \text{prema (130a)} =$$
$$= \iint_{\sigma} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \tag{185}$$

gdje je σ projekcija plohe S na ravninu XY.

Projiciramo li zadanu plohu $z = z(x, y)$ na ravninu YZ i uzmemo li opet u obzir, da je u tom slučaju apscisa x integranda $f(x, y, z)$ apscisa $x(y, z)$ zadane plohe, dobijemo obzirom na (130c) plošni integral u obliku:

$$I = \iint_{\sigma_1} f[x(y, z), y, z] \frac{dy\,dz}{\cos\alpha} =$$
$$= \iint_{\sigma_1} f[x(y, z), y, z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz \tag{185a}$$

Tu je α kut, što ga normala na element plohe dS zatvara s osi $+X$, a σ_1 projekcija plohe S na ravninu YZ.

Konačno, projiciranje plohe S na ravninu XZ daje prema (130d) plošni integral u obliku

$$I = \iint_{\sigma_2} f[x, y(x, z), z] \frac{dx\,dz}{\cos\beta} = \iint_{\sigma_2} f[x, y(x, z), z] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz \tag{185b}$$

Tu je β kut, što ga normala na dS zatvara s $+$ osi Y, a σ_2 projekcija plohe S na ravninu XZ.

Primjeri

1. $\iint_S \left(2x + \frac{4}{3}y + z\right) dS$, gdje je S dio ravnine $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$,

koji leži u prvom oktantu (slika 170).

Kako normala Nr na ravninu ima stalan smjer, računat ćemo prema prvom dijelu formule (185), t. j. prema

$$\iint_{\sigma} f[x, y, z(x, y)] \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

Prema (47):

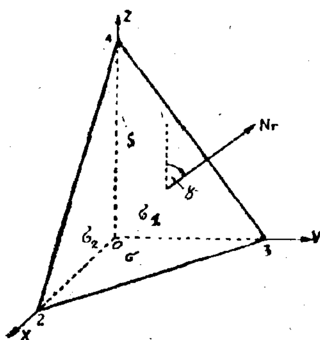
$$\cos\gamma = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}}} = \frac{3}{\sqrt{61}}$$

a iz jednadžbe zadane ravnine slijedi:

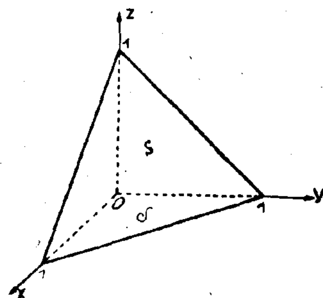
$$z(x, y) = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$$

$$I = \iint_{\sigma} \left[2x + \frac{4}{3}y + 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\right] \cdot \frac{dx\,dy}{\frac{3}{\sqrt{61}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{61}}{3} \iint_{\sigma} 4\,dx\,dy = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{61} \cdot \sigma = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} = 4\sqrt{61}$$



Sl. 170



Sl. 171

Izračunajmo sada isti integral projicirajući dio S zadane ravnine na ravninu YZ, t. j. primijenivši formulu (185a).

Prema (47):

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}}} = \frac{6}{\sqrt{61}} \quad ; \quad x = 2\left(1 - \frac{y}{3} - \frac{z}{4}\right)$$

Prema (185a):

$$I = \frac{\sqrt{61}}{6} \iint_{\sigma_1} \left(4 - \frac{4}{3}y - z + \frac{4}{3}y + z\right) dy\,dz =$$

$$= \frac{\sqrt{61}}{6} \cdot 4 \iint_{\sigma_1} dy\,dz = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{61} \cdot \sigma_1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{61} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 4\sqrt{61}$$

Izračunaj još jednom isti plošni integral projicirajući dio S zadane ravnine na koodinatnu ravninu XZ, t. j. po formuli (185b). Dobit ćeš isti rezultat $4\sqrt{61}$.

2. $\iint_S xyz\,dS$, gdje je S dio ravnine $x + y + z = 1$, koji leži u prvom oktantu (slika 171).

Opet računamo po prvom dijelu formule (185):

Prema (47):

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z = 1 - x - y$$

$$I = \iint_{\sigma} xy(1-x-y)\frac{dx\,dy}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}\iint_{\sigma}(xy - x^2y - xy^2)\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x}(xy - x^2y - xy^2)\,dy = \sqrt{3}\int_0^1 dx \left| x(1-x)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3}\right|_0^{1-x} =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \left[\frac{x}{2}(1-x)(1-x)^2 - \frac{x}{3}(1-x)^3\right]dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1(x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left|\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{120}$$

Izračunaj za vježbu isti plošni integral projicirajući dio S zadane ravnine na koordinatne ravnine YZ i XZ. Rezultati moraju biti isti.

3. $\iint_S x^2y^2\,dS$, gdje je S gornja polovina površine kugle polumjera R sa središtem u ishodištu.

Kako se smjer normale na kuglinu plohu mijenja od točke do točke, računat ćemo taj plošni integral po drugoj polovini formule (185) uzevši ispred drugog korijena predznak +, jer normala na gornju polovinu kugline plohe zatvara kut manji od 90°, pa je $\cos\gamma > 0$.

$$I = \iint_{\sigma} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Jednadžba kugline plohe glasi:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \text{ odnosno } z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Prema (92):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

pa

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}=\frac{R^2}{z^2}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{z}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$I=\iint_\sigma x^2y^2\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot dx\,dy$$

gdje je σ projekcija polukugle na ravninu XY, t. j. krug $x^2+y^2=R^2$

Prema (111c)

$$x=\rho\cos\varphi$$
$$y=\rho\sin\varphi$$
$$dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$I=R\iint_\sigma\frac{\rho^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho\,d\varphi=R\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^R\frac{\rho^5\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

Prvi integral lako riješimo prikazavši intregtal u obliku $\frac{1}{4}\cdot4\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi=\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi$,

dok drugi integral rješavamo uz supstituciju $R^2-\rho^2=t$, odatle je $\rho^4=(t-R^2)^2$, a $\rho\,d\rho=-\frac{1}{2}dt$, pri čemu uzmemo u obzir, da je $t=R^2$ za $\rho=0$, odnosno $t=0$ za $\rho=R$.

Dobijemo:

$$I=R\left|\frac{1}{8}\left(\varphi-\frac{\sin4\varphi}{4}\right)\right|_0^{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}R^2t^{\frac{3}{2}}+2R^4t^{\frac{1}{2}}\right|_{R^2}^{0}\right]=$$

$$=\frac{R}{8}\cdot2\pi\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}R^5-\frac{4}{3}R^5+2R^5\right)=\underline{\frac{2\pi R^6}{15}}$$

Dosada smo promatrali plošne integrale uzete po površini S zadane plohe. Međutim, često se plošni integrali računaju po koordinatama, pri čemu se i sada uzima u obzir, da je ploha orijentirana u prije navedenom smislu.

Razlika između plošnog integrala uzetog po plohi i integrala uzetog po koordinatama sastoji se u tome, da se u prvom slučaju vrijednost funkcije $f(x,y,z)$ u točki plohe S množi s elementom površine dS, dok se u drugom slučaju množi s orijentiranom elementom $d\sigma$ koordinatne ravnine XY (ili YZ ili XZ), koji je projekcija elementa plohe dS na dotičnu koordinatnu ravninu.

Prema tome plošni integrali uzeti po koordinatama glase uz sve prijašnje pretpostavke za zadanu podintegralnu funkciju $f(x, y, z)$ i plohu $z=z(x,y)$, odnosno $x=x(y, z)$ i $y=y(x, z)$

$$I=\iint_S f(x,y,z)\,dx\,dy=\iint_\sigma f[x,y,z(x,y)]\,dx\,dy \qquad (186)$$

gdje je σ projekcija plohe S na ravninu XY, a $dx\,dy=d\sigma$ projekcija elementa plohe dS na ravninu XY (vidi sl. 139a)

Kako je prema (130)

$$dx\,dy = dS \cdot \cos\gamma \tag{187}$$

plošni se integral po koordinatama može napisati i u obliku

$$I = \iint_S f(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_S f(x,y,z)\cos\gamma \cdot dS \tag{186a}$$

Iz posljednjeg izraza za plošni integral vidimo, da ploha ostaje orijentirana i pri računanju plošnog integrala po koordinatama, jer u integral ulazi $\cos\gamma$, t. j. kosinus kuta, što ga normala na plohu zatvara s + osi Z. Pri računanju plošnih integrala po koordinatama, uzima se u obzir samo predznak kosinusa smjera normale na plohu, dok se sama vrijednost kosinusa smjera izostavlja.

Na isti način dobijemo uzevši u obzir, da je prema (130c)

$$dy\,dz = dS\cos\alpha \tag{188}$$

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y,z)\,dy\,dz &= \iint_S f(x,y,z)\cos\alpha \cdot dS = \\ &= \iint_{\sigma_1} f[x(y,z), y, z]\,dy\,dz\end{aligned} \tag{189}$$

gdje je σ_1 projekcija plohe S na ravninu YZ, α kut plošne normale s + osi X, a $dy\,dz = dS\cos\alpha = d\sigma_1$.

Analogno uzevši u obzir, da je prema (130d)

$$dx\,dz = dS\cos\beta \tag{190}$$

dobijemo

$$\begin{aligned}\iint_S f(x,y,z)\,dx\,dz &= \iint_S f(x,y,z)\cos\beta \cdot dS = \\ &= \iint_{\sigma_2} f[x, y(x,z), z]\,dx\,dz\end{aligned} \tag{191}$$

gdje je σ_2 projekcija plohe S na ravninu XZ, β kut plošne normale s + osi Y, a $dx\,dz = dS\cos\beta = d\sigma_2$.

Kako ćemo kasnije vidjeti, osobito često treba računati plošne integrale, koji predočuju zbroj gore navedenih integrala uzetih od triju različitih funkcija $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$, pri čemu se pretpostavlja, da su funkcije P, Q i R neprekinute zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama.

$$\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy = \\ &= \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,dS\end{aligned} \tag{192}$$

Primjeri

1. $$\iint\limits_S x\,y\,z\,dx\,dy,$$

gdje je S dio kugline plohe $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, koji se nalazi u I. i V oktantu (slika 172).

Kako je funkcija $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ dvoznačna, moramo područje integracije S rastaviti u dva dijela:

gornji S_1 jednadžbe $z_1 = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

i

donji S_2 jednadžbe $z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Sl. 172

pa je prema (186):

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} = \iint\limits_\sigma x\,y\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy - \iint\limits_\sigma x\,y\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy \qquad \text{(a)}$$

gdje je σ zajednička projekcija ploha S_1 i S_2 na ravninu XY, t. j. krug $x^2 + y^2 = R^2$.

Sada moramo uzeti u obzir, da je ploha S orijentirana. Vanjska normala na plohu S_1 zatvara s osi $+Z$ kutove $\gamma < 90°$, pa je $\cos\gamma > 0$, dok normala na plohu S_2 zatvara s osi $+Z$ kutove $\gamma > 90°$, pa je $\cos\gamma < 0$ (vidi sl. 172). Iz toga slijedi, da u drugom integralu izraza (a) treba promijeniti predznak.

Dobijemo:

$$I = 2\iint\limits_\sigma x\,y\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$$

Prelazimo na polarne koordinate prema (111a):

$$I = 2\iint\limits_\sigma \rho^3 \sin\varphi\cdot\cos\varphi\sqrt{R^2 - \rho^2}\cdot d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^R \rho^3\sqrt{R^2 - \rho^2}\cdot d\rho$$

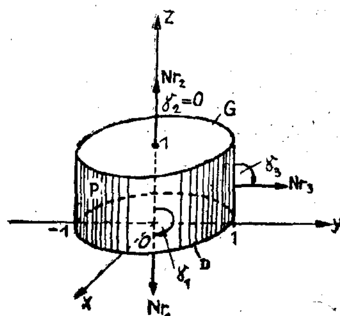
Na sličnì način i uz istu supstituciju kao u posljednjem primjeru 3, dobijemo:

$$I = \left|-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \left|-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}R^2 t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)\right|_{R^2}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot(-1-1)\cdot\left(\frac{2}{3}R^5 - \frac{2}{5}R^5\right) = \underline{\frac{2R^5}{15}}$$

2. $$\iint\limits_S (2x + y + z)\,dy\,dz + (x - 2y + z)\,dx\,dz + (x - z)\,dx\,dy$$

gdje je S površina valjka visine 1 i polumjera baze 1 (sl. 173).



Sl. 173

Prema slici rastavimo zadani plošni integral u tri integrala

$$\iint_S = \iint_D + \iint_G + \iint_P$$

Pri računanju $\iint_D$ uzmemo u obzir, da je

$z = 0$, $dz = 0$ i $\cos\gamma_1 = \cos 180° = -1$, pa zadani plošni integral prima oblik:

$$\iint_D = 0 + 0 - \iint_D (x - 0)\, dx\, dy = \text{uz prijelaz na polarne koordinate} =$$

$$= -\iint_D \rho \cos\varphi \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = -\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^2\, d\rho =$$

$$= -\Big|\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \Big|\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = 0$$

$$\iint_G = (z = 1\ ;\ dz = 0\ ;\ \cos\gamma_2 = \cos 0 = 1) = 0 + 0 +$$

$$+ \iint_G (x - 1)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho\cos\varphi - 1)\, \rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \Big|\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi - \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\varphi}{3} - \frac{1}{2}\right) d\varphi = \Big|\frac{\sin\varphi}{3} - \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = -\pi$$

Pri računanju $\iint_P$ moramo uzeti u obzir:

1) $\cos\gamma_3 = \cos 90° = 0$, pa je $dx\, dy = dS \cos\gamma_3 = 0$, a to se vidi i iz slike.

Zadani plošni integral reducira se, dakle, na

$$\iint_P (2x + y + z)\, dy\, dz + (x - 2y + z)\, dx\, dz$$

2) Računajući prvi dio tog integrala moramo plašt valjka projicirati na ravninu YZ. Prednji i stražnji dio plašta ima za projekciju pravokutnik baze 2 i visine 1 (vidi sl. 173), ali za prednji je dio $\alpha < 90°$, pa je $\cos\alpha > 0$, dok je $x = +\sqrt{1 - y^2}$, a za stražnji dio $\alpha > 90°$, pa je $\cos\alpha < 0$, dok je $x = -\sqrt{1 - y^2}$.

Prema tome:

$$\iint_P (2x + y + z)\, dy\, dz = \iint_{\sigma_1} (2\sqrt{1 - y^2} + y + z)\, dy\, dz -$$

$$- \iint_{\sigma_1} (-2\sqrt{1 - y^2} + y + z)\, dy\, dz \qquad \text{(a)}$$

3) Pri računanju drugog dijela tog integrala projiciramo plašt valjka na ravninu *XZ*. Desni i lijevi dio plašta imaju istu projekciju $\sigma_2 = \sigma_1$ = pravokutnik baze 2 i visine 1, pri čemu je za desni dio $\cos\beta > 0$ i $y = +\sqrt{1-x^2}$, a za lijevi $\cos\beta < 0$ i $y = -\sqrt{1-x^2}$.

Prema tome:

$$\iint_P (x-2y+z)\,dx\,dz = \iint_{\sigma_2=\sigma_1} (x-2\sqrt{1-x^2}+z)\,dx\,dz -$$

$$-\iint_{\sigma_2=\sigma_1} (x+2\sqrt{1-x^2}+z)\,dx\,dz \qquad \text{(b)}$$

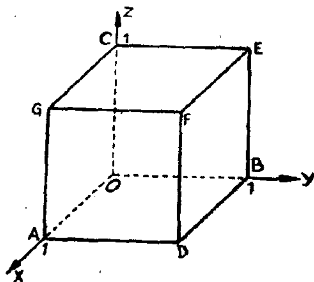
Zbrojimo li izraze (a) i (b), dobit ćemo

$$\iint_P = 0$$

jer su prvi i četvrti, a također drugi i treći integrali identični i protivnog predznaka. Da se u to uvjeriš, izračunaj te integrale!

Konačno imamo:

$$\iint_S = 0 - \pi + 0 = \underline{\underline{-\pi}}$$



Sl. 174

3. $$\iint_S (x^2+y^2)\,dy\,dz + \sin z\,dx\,dz + e^{x+z}\,dx\,dy$$

gdje je *S* površina kocke omeđene ravninama

$$x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\ x=1\ ,\ y=1\ ,\ z=1 \text{ (slika 174).}$$

$$\iint_S = \iint_{ADBO} + \iint_{GFEC} + \iint_{OBEC} + \iint_{ADFG} + \iint_{AOCG} + \iint_{DBEF}$$

$$\iint_{ADBO} = (z=0\ ;\ dz=0\ ;\ \cos\gamma = \cos 180° = -1) =$$

$$= 0 + 0 - \iint_{ADBO} e^x\,dx\,dy = -\int_0^1 e^x\,dx \int_0^1 dy = -(e-1)$$

$$\iint_{GFEC} = (z=1\ ;\ dz=0\ ;\ \cos\gamma = \cos 0 = +1) =$$

$$= 0 + 0 + \iint_{ADBO} e^{x+1}\,dx\,dy = \int_0^1 e^{x+1}\,dx \int_0^1 dy = \left| e^{x+1} \right|_0^1 = e^2 - e$$

$$\iint\limits_{OBEC} = (x = 0 \quad dx = 0 \ , \ \cos\alpha = \cos 180^\circ = -1) =$$

$$= -\iint\limits_{OBEC} y^2\, dy\, dz + 0 + 0 = -\int\limits_0^1 y^2\, dy \int\limits_0^1 dz = -\frac{1}{3}$$

$$\iint\limits_{ADFG} = (x = 1 \ ; \ dx = 0 \ ; \ \cos\alpha = \cos 0 = +1) =$$

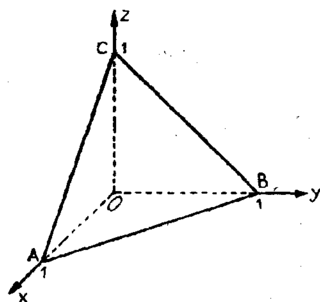
$$= \iint\limits_{OBEC} (1 + y^2)\, dy\, dz + 0 + 0 = \left| y + \frac{y^3}{3} \right|_0^1 \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

$$\iint\limits_{AOCG} = (y = 0 \ ; \ dy = 0 \ ; \ \cos\beta = \cos 180^\circ = -1) =$$

$$= 0 - \iint\limits_{AOCG} \sin z\, dx\, dz + 0 = -\int\limits_0^1 \sin z\, dz \int\limits_0^1 dx = \cos 1 - 1$$

$$\iint\limits_{DBEF} = (y = 1 \ ; \ dy = 0 \ ; \ \cos\beta = \cos 0 = +1) =$$

$$= 0 + \iint\limits_{AOCG} \sin z\, dx\, dz + 0 = \int\limits_0^1 \sin z\, dz \int\limits_0^1 dx = -(\cos 1 - 1)$$



Sl. 175

$$\iint\limits_S = -(e - 1) + (e^2 - e) - \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{4}{3} + (\cos 1 - 1) - (\cos 1 - 1) = \underline{e^2 - 2e + 2}$$

4. $$\iint\limits_S (2x + y - z)\, dy\, dz +$$

$$+ (x - 2y + z)\, dx\, dz + (4x - y - z)\, dx\, dy$$

gdje je S oplošje tetraedra zadanog slikom 175.

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{AOB} + \iint\limits_{BOC} + \iint\limits_{AOC} + \iint\limits_{ABC}$$

$$\iint\limits_{AOB} = (z = 0 \ ; \ dz = 0 \ ; \ \cos\gamma = \cos 180^\circ = -1) = -\iint\limits_{AOB} (4x - y)dx\, dy =$$

$$= -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (4x - y)\, dy = -\int\limits_0^1 dx \left| 4xy - \frac{y^2}{2} \right|_0^{1-x} =$$

$$= -\int_0^1 \left[4x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2\right] dx = -\frac{1}{2}$$

$$\iint_{BOC} = (x = 0 \;;\; dx = 0 \;;\; \cos\alpha = \cos 180° = -1) =$$

$$= -\iint_{BOC} (y - z) dy\, dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (z - y) dz = \int_0^1 dy \left| \frac{z^2}{2} - y\, z \right|_0^{1-y} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 [(1-y)^2 - 2y(1-y)]\, dy = 0$$

$$\iint_{AOC} = (y = 0 \;;\; dy = 0 \;;\; \cos\beta = \cos 180° = -1) =$$

$$= -\iint_{AOC} (x + z)\, dx\, dz = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + z) dz =$$

$$= -\int_0^1 dx \left| xz + \frac{z^2}{2} \right|_0^{1-x} = -\frac{1}{2} \int_0^1 [2x(1-x) + (1-x)^2]\, dx = -\frac{1}{3}$$

$$\iint_{ABC} = ?$$

Pri računanju tog integrala moramo uzeti u obzir: da jednadžba ravnine ABC glasi $x + y + z = 1$, da normala na tu ravninu zatvara s koordinatnim osima kutove, koji su manji od $90°$, i da treba projicirati trokut ABC:

1) na ravninu YZ uzevši $x = 1 - y - z$
2) na ravninu XZ uzevši $y = 1 - x - z$
3) na ravninu XY uzevši $z = 1 - x - y$

Prema tome:

$$\iint_{ABC} = \iint_{BOC} [2(1 - y - z) + y - z] dy\, dz + \iint_{AOC} [x - 2(1 - x - z) + z]\, dx\, dz +$$

$$+ \iint_{AOB} [4x - y - (1 - x - y)]\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{BOC} (2 - y - 3z)\, dy\, dz + \iint_{AOC} (3x + 3z - 2)\, dx\, dz +$$

$$+\iint\limits_{AOB}(5x-1)dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(2-y-3z)\,dz+$$

$$+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(3x+3z-2)\,dz+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(5x-1)\,dy=$$

$$=\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\iint\limits_{S}=-\frac{1}{2}+0-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$$

Izračunaj:

1. $\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dS$, gdje je S gornja polovina kugline plohe

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad [I=\pi R^3]$$

2. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$, gdje je S ploha elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \left[I=\frac{4}{3}\pi abc\right]$$

3. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, gdje je S površina kocke omeđene ravninama $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$ i $z=1$. $[I=3]$

§ 12. VEZA IZMEĐU INTEGRALA RAZLIČITIH TIPOVA

Veliko značenje u matematičkoj analizi i fizici, a također u mnogim tehničkim naukama imaju formule, koje daju vezu između integrala uzetih po nekom području i integrala uzetih po granicama tih područja. Tu vezu daju formule Green-a, Stockes-a i Gauss-a.

1. Greenova formula

Green-ova formula (čitaj Grin) daje vezu između poznatog nam krivuljnog integrala

$$\oint\limits_K P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$$

uzetog po ravnoj zatvorenoj krivulji k i dvostrukog integrala uzetog po površini, koju ta krivulja k omeđuje.

Da takva veza postoji, znamo već od prije: sjetimo se samo formule, koju smo izveli za površinu sektora krivulje $y = y(x)$. Ta formula za površinu zatvorene krivulje K glasi:

$$S = \frac{1}{2} \oint_{+K} x\,dy - y\,dx$$

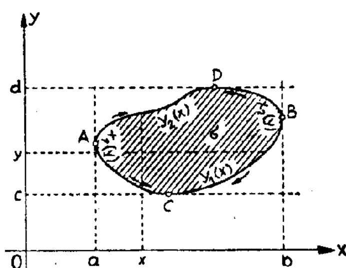
Pomoću te formule izračunali smo kao primjer površinu sektora istostrane hiperbole (vidi Dio II. § 7, 1).

Green daje tu vezu u općem obliku.

Neka su zadane dvije funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, koje su neprekinute zajedno sa svojim prvim parcijalnim derivacijama i koje su definirane u području σ ravnine XY. To područje σ omeđeno je krivuljom k, kojoj je jednadžba $y = y(x)$, odnosno $x = x(y)$ i koju pravci paralelni s koordinatnim osima sijeku najviše u dvije točke (sl. 176).

Izračunajmo dvostruki integral parcijalne derivacije po y funkcije $P(x, y)$ uzevši ga po tom području σ:

$$I = \iint_{\sigma} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy$$



Sl. 176

Kako se vidi iz slike, tangente na krivulju k, paralelne s osi Y, dijele krivulju na dva dijela: donji jednadžbe $y_1(x)$ i gornji jednadžbe $y_2(x)$, pa integrirajući najprije po y, a zatim po x dobijemo:

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b dx \left| P(x, y) \right|_{y_1(x)}^{y_2(x)} =$$ [kad $P(xy)$ parcijalno deriviramo po y, x je konstanta,

P je dakle funkcija samo od y, pa je ostala bez promjene, jer smo je najprije derivirali, a zatim integrirali] =

$$= \int_a^b \{P[x, y_2(x)] - P[x, y_1(x)]\}\,dx =$$

$$= \int_a^b P[x, y_2(x)]\,dx - \int_a^b P[x, y_1(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b P[x, y_2(x)]\,dx + \int_b^a P[x, y_1(x)]\,dx =$$

$$= \oint_{-K} P(x, y)\,dx$$

jer smo, kako se vidi iz slike, izvršili potpuno obilaženje krivulje k u negativnom smislu (u smislu kazaljke na satu, površina σ desno!).

Ili

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_{+K} P(x,y)\,dx \qquad \text{(a)}$$

Na isti način dobijemo:

$$\iint_\sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \text{prema slici 176} =$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx = \int_c^d dy \left| Q(x,y) \right|_{x_1(y)}^{x_2(y)} =$$

$$= \int_c^d \{Q[x_2(y), y] - Q[x_1(y), y]\}\,dy =$$

$$= \int_c^d Q[x_2(y), y]\,dy + \int_d^c Q[x_1(y), y]\,dy = \oint_{+K} Q(x,y)\,dy$$

jer smo sada izvršili obilaženje krivulje k u pozitivnom smislu (protiv kazaljke na satu, površina lijevo).

Dobili smo dakle:

$$\iint_\sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_{+K} Q(x,y)\,dy$$

Oduzmemo li od te jednakosti jednakost (a), dobijemo:

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad (193)$$

To je Greenova formula.

Pomoću Greenove formule možemo zamijeniti dvostruki integral, uzet po ravnom području, krivuljnim integralom uzetim po krivulji, koja to ravno područje omeđuje.

Uzmemo li da je $P = -y$, a $Q = x$ i izračunamo li: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ i $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, dobijemo prema Greenovoj formuli

$$\iint_{\sigma} 2 \cdot dx\, dy = \oint_{K} x\, dy - y\, dx \tag{193 a}$$

ili

$$\sigma = \frac{1}{2} \oint_{K} x\, dy - y\, dx,$$

a to je gore spomenuta formula za površinu zatvorene krivulje $y = y(x)$.

Greenova formula daje dragocjenu kontrolu krivuljnih integrala izračunatih po zatvorenoj krivulji, naravno uz uvjet, da su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekinute u području σ, koje ta krivulja omeđuje, jer je neprekinutost tih funkcija u području σ bitna pretpostavka Greenove formule.

Kontrolirajmo pomoću Greenove formule krivuljne integrale, izračunate u primjerima 1., 2., 5. i 6. na str. 333 i sl.. Krivuljne integrale navedene u primjerima 3. i 4. ne možemo kontrolirati po Greenu, jer su uzeti po otvorenim krivuljama.

Primjer 1.

$$\oint_{K} (\underbrace{x - 2y + 5}_{P})dx + (\underbrace{3x + 4y - 7}_{Q})dy$$

Računajmo prema (193):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3$$

$\oint_{K} = \iint_{\sigma} (3 + 2)dx\, dy = 5 \iint_{\sigma} dx\, dy = 5\,\sigma =$ prema slici 161 $= 5 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = \underline{75}$, a to je rezultat, koji smo prije dobili.

Primjer 2.

$$\oint_{K} (\underbrace{x^2 - y^2}_{P})dx + (\underbrace{x^2 + y^2}_{Q})\, dy$$

Prema (193):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\oint_{K} = \iint_{\sigma} (2x + 2y)\, dx\, dy = \text{prema slici } 162 =$$

$$= 2\int_2^7 dx \int_3^5 (x+y)dy = 2\int_2^7 dx \left| xy + \frac{y^2}{2} \right|_3^5 =$$

$$= 2\int_2^7 \left(5x + \frac{25}{2} - 3x - \frac{9}{2}\right) dx = 2\int_2^7 (2x+8)dx =$$

$$= 2\left| x^2 + 8x \right|_2^7 = 2(49 + 56 - 4 - 16) = \underline{170}$$

Primjer 5.

$$\oint_K (2x - y + 3)dx + (x + 2y - 5)dy$$

Prema (193):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\oint_K = 2\iint_\sigma dx\,dy = 2\,\sigma = \text{prema slici } 163 =$$

$$= 2\left(\frac{2\cdot 1}{2} + 2\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3\cdot 2\cdot \pi + 5\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4\pi\right) = \underline{30 + 5\pi}$$

Primjer 6.

$$\oint_K \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}, \quad \text{gdje je } k \text{ kružnica polumjera } r.$$

Napisavši zadani integral u obliku

$$\oint_K \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

vidimo, da je $P = \frac{y}{x^2+y^2}$, a $Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$. Funkcije P i Q ne odgovaraju pretpostavci Greenove formule, jer nisu neprekinute u svim točkama područja σ omeđenog kružnicom $x^2 + y^2 = r^2$ (prekinute su u ishodištu), pa kontrola po Greenu nije dopustiva. Da se u to uvjerimo, računamo prema (193):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\oint_K = \iint_\sigma \left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx\,dy = 0$$

dok smo prije dobili drugi rezultat i to -2π.

Kontroliraj po Greenovoj formuli primjere 1. i 3. navedene na str. 337.

Važna posljedica Greenove formule. Govoreći u § 7 o egzaktnim diferencijalima i njihovom integriranju, dokazali smo, da je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{147}$$

nuždan i dovoljan uvjet, da linearni diferencijalni izraz

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)dy$$

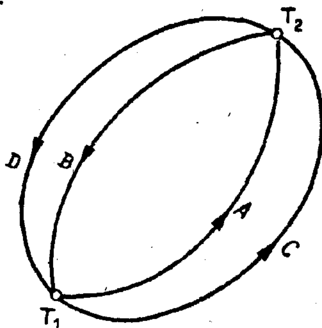
predočuje totalni diferencijal neke funkcije $u = u(x, y)$.

Uzmimo sada slučaj, da funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, koje ulaze u krivuljni integral

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad \text{(a)}$$

i za koje pretpostavljamo, da su neprekinute zajedno sa svojim prvim parcijalnim derivacijama u području σ, koje omeđuje krivulja k, zadovoljavaju gore navedeni uvjet (147), t. j. neka integrand predočuje egzaktni diferencijal. Tada uvrštenje toga uvjeta u Greenovu formulu daje:

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$



Sl. 177

To znači: ako je $Pdx + Qdy$ egzaktni diferencijal, vrijednost krivuljnog integrala po bilo kojoj zatvorenoj krivulji jednaka je nuli.

Na pr. krivuljni integrali po zatvorenim krivuljama $T_1AT_2BT_1$ i $T_1CT_2DT_1$ (sl. 177) jednaki su u tom slučaju nuli, a iz toga slijedi, da integrali po otvorenim krivuljama T_1AT_2, T_1BT_2, T_1CT_2 i T_1DT_2 moraju imati istu vrijednost, jer su i integrali po zatvorenim krivuljama $T_1AT_2CT_1$ i $T_1BT_2DT_1$ jednaki nuli.

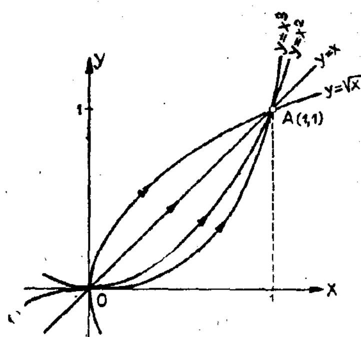
Prema tome:

Ako je $Pdx+Qdy$, egzaktni diferencijal, t. j. ako je ispunjen uvjet $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0$, odnosno $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, tada vrijednost krivuljnog integrala $Pdx + Qdy$ ne ovisi o putu integracije, već jedino o početnoj i konačnoj točki toga puta, dok je krivuljni integral po zatvorenoj krivulji jednak nuli.

Na pr. $\int_{+K} (2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy$, koji smo naveli kao primjer 3. na str. 337, jednak je nuli po bilo kojoj zatvorenoj krivulji, jer je integrand egzaktni diferencijal:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy, \quad \text{pa je}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



Sl. 178

S istog razloga vrijednost krivuljnog integrala

$$\int_K 2xy\,dx + x^2dy$$

uzetog uzduž bilo koje otvorene krivulje ne ovisi o putu integracije, već jedino o početnoj i konačnoj točki toga puta, jer je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

Da se u to uvjerimo, izračunajmo taj integral po pravcu $y = x$ i po parabolama $y = x^2$, $y = x^3$ i $y = \sqrt{x}$ od točke $O(0, 0)$ do točke $A(1, 1)$ (vidi sl. 178).

1) po $y = x$, odnosno $x = y$:

$$I = \int_0^1 2x^2dx + \int_0^1 y^2\,dy = \left|\frac{2x^3}{3} + \frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \underline{1}$$

2) po $y = x^2$, odnosno $x = +\sqrt{y}$:

$$I = \int_0^1 2x^3dx + \int_0^1 y\,dy = \left|\frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \underline{1}$$

3) po $y = x^3$, odnosno $x = \sqrt[3]{y}$:

$$I = \int_0^1 2x^4dx + \int_0^1 \sqrt[3]{y^2}\,dy = \left|\frac{2x^5}{5} + \frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right|_0^1 = \underline{1}$$

4) po $y = \sqrt{x}$, odnosno $x = y^2$:

$$I = \int_0^1 2x\sqrt{x}\,dx + \int_0^1 y^4\,dy = \left|\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{y^5}{5}\right|_0^1 = \underline{1}$$

Iz dobivenih rezultata vidimo, da je vrijednost tog integrala jednaka nuli za sve zatvorene krivulje, koje prolaze točkama O i A, jer integrirajući u obratnom smislu, t. j. od A do O dobijemo svaki put vrijednost -1.

Vrijedi i obrat Greenove formule:

Da linearni diferencijalni izraz $Pdx + Qdy$ bude egzaktni diferencijal, nužno je i dovoljno, da vrijednost krivuljnog integrala $Pdx + Qdy$ ne ovisi o putu integri-

ranja, već jedino o početnoj i konačnoj točki toga puta, a integral po zatvorenoj krivulji da je jednak nuli, jer je to samo onda moguće, ako je $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

U tom slučaju diferencijalni izraz $Pdx + Qdy$ predočuje totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y)$, koju možemo definirati kao integral duž krivulje k od točke $A(a, b)$ do točke $T(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_{a,b}^{x,y} Pdx + Qdy$$

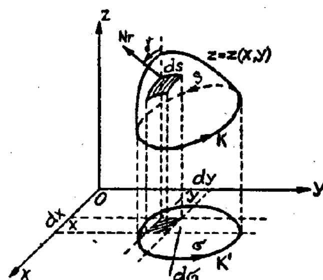
2. Stokesova formula

Stokes-ova formula (čitaj Stoks) je proširenje Greenove formule. Dok Greenova formula svodi integral uzet po ravnoj površini na integral po ravnoj krivulji, Stokesova formula svodi integral uzet po zakrivljenoj površini, t. j. plošni integral, na integral po prostornoj krivulji.

Neka je zadana u prostoru ploha S jednadžbe $z = z(x, y)$, koju pravci paralelni s osi Z probadaju najviše u jednoj točki. Tu plohu neka omeđuje prostorna krivulja k (vidi sl. 179). U tom dijelu prostora neka su definirane tri funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$, za koje pretpostavljamo, da su neprekinute zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama prvog reda.

Uzmimo integral funkcije $P(x, y, z)$ po prostornoj krivulji k i integrirajmo samo po x:

$$\oint_k P(x, y, z)\, dx =$$



Sl. 179

budući da krivulja k leži na plohi S, kojoj je jednadžba $z = z(x, y)$, aplikata $z = z(x, y)$

$$= \oint_{k'} P[x, y, z(x, y)]\, dx$$

gdje je k' projekcija krivulje k na ravninu XY.

Kako je k' ravna krivulja, a $P[x, y, z(x, y)] = P_1(x, y)$ funkcija dviju nezavisnih promjenljivih, možemo primijeniti Greenovu formulu.

Uzevši u obzir, da je $Q(x, y) = 0$, imamo prema (193):

$$\oint_k P(x, y, z)\, dx = \oint_{k'} P_1(x, y)\, dx = -\iint_\sigma \frac{\partial P_1}{\partial y}\, dx\, dy \qquad \text{(a)}$$

gdje je σ područje ravnine XY, koje je omeđeno krivuljom k'.

Računamo:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{P[x, y, z(x, y)]\right\} = \text{prema (87)} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\oint_k P(x, y, z)\, dx = \iint_\sigma \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} dx\, dy\right) \quad \text{(b)}$$

Znamo, da je prema (130):

$$dxdy = dS\, cos\, \gamma,$$

gdje je γ kut, što ga orijentirana normala na element dS plohe S zatvara s + osi Z (vidi sl. 179).

U drugu je ruku

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dx\, dy = q \cdot dS \cdot cos\, \gamma = \text{prema (130)} =$$

$$= -dS \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \text{prema (77a) i (39)} = -dS\, cos\, \beta$$

gdje je $cos\, \beta = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ kosinus kuta, što ga normala na dS zatvara s + osi Y.

Uvrštenje u (b) daje:

$$\oint_k P(x, y, z)\, dx = \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dS\, cos\, \gamma + \frac{\partial P}{\partial z} dS\, cos\, \beta\right) =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} cos\, \beta - \frac{\partial P}{\partial y} cos\, \gamma\right) dS$$

Dobili smo dakle:

$$\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} cos\, \beta - \frac{\partial P}{\partial y} cos\, \gamma\right) dS = \oint_k P(x, y, z)\, dx$$

Na slični način dobijemo:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} cos\, \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} cos\, \alpha\right) dS = \oint_k Q(x, y, z)\, dy$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} cos\, \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} cos\, \beta\right) dS = \oint_k R(x, y, z)\, dz$$

Zbrojimo li te tri jednakosti, dobit ćemo nakon uređenja:

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS=$$
$$=\oint\limits_k P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz \tag{194}$$

To je Stokesova formula.

Ona pretvara bilo koji plošni integral, t. j. integral po orijentiranoj površini plohe, u krivuljni integral uzet po orijentiranoj međi te plohe.

Uzevši u obzir, da je prema (130, 130c i d):

$$dS\cos\alpha = dy\,dz$$
$$dS\cos\beta = dx\,dz$$
$$dS\cos\gamma = dx\,dy$$

možemo Stokesovu formulu napisati u obliku:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=$$
$$=\oint\limits_K P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz \tag{194a}$$

Uzmimo specijalni slučaj Stokesove formule.

Neka je ploha S ravna i leži zajedno sa svojom međom k u ravnini XY. Tada je $z=0$ i $dz=0$, pa uvrštenje u (194a) daje:

$$\iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_K P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

a to je Greenova formula.

Pamteći Greenovu formulu, možemo lako napisati Stokesovu, treba samo ciklički permutirati u $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ slova x, y, z i P, Q, R. [Vidi dalje formulu (211)].

Pretpostavimo, da je integrand krivuljnog integrala

$$\int\limits_K Pdx+Qdy+Rdz$$

totalni diferencijal neke funkcije $U = U(x, y, z)$, t. j. funkcije P, Q i R zadovoljavaju uvjete (149):

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Uvrštenje tih uvjeta u Stokesovu formulu daje:

$$\oint_K Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

a to znači: ako je $Pdx + Qdy + Rdz$ **egzaktni diferencijal, vrijednost krivuljnog integrala ne ovisi o putu integriranja, već jedino o početnoj i konačnoj točki toga puta, a krivuljni integral po zatvorenoj krivulji jednak je nuli.**

Vrijedi i obrat te posljedice Stokesove formule: **da linearni diferencijalni izraz** $Pdx + Qdy + Rdz$ **predočuje egzaktni diferencijal, nužno je i dovoljno, da vrijednost krivuljnog integrala** $Pdx + Qdy + Rdz$ **ne ovisi o putu integriranja, već jedino o početnoj i konačnoj točki toga puta, a krivuljni integral po zatvorenoj krivulji da je jednak nuli, a to je moguće samo u tom slučaju, kad funkcije** P, Q i R zadovoljavaju uvjete (149).

U tom slučaju predočuje diferencijalni izraz $Pdx + Qdy + Rdz$ totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y, z)$, koju možemo definirati kao krivuljni integral

$$U(x, y, z) = \int_{a,b,c}^{x,y,z} Pdx + Qdy + Rdz \tag{195}$$

Na pr. računajući krivuljni integral

$$\oint_K \underset{P}{(x + 3)}dx + \underset{Q}{(y - 1)}dy + \underset{R}{(2z + 2)}dz$$

po luku cilindričke spirale $\widehat{AB}$ i pravcu $\overline{BA}$ (vidi primjer 3. na str. 345), dobili smo nulu. Integrand je dakle egzaktni diferencijal. Da se u tome uvjerimo, izračunajmo uvjete (149) za zadani integrand.

Dobijemo:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

pa je

$$(x + 3)dx + (y - 1)dy + (2z + 2)dz = dU$$

Da odredimo funkciju $U(x, y, z)$, izračunajmo krivuljni integral po bilo kojem putu, na pr. po pravcu OB, od točke $O(0, 0, 0)$ do neke točke $T(x, y, z)$ toga pravca.

Prema (195).

$$U(x, y, z) = \int_{0,0,0}^{x,y,z} (x+3)dx + (y-1)dy + (2z+2)dz$$

Jednadžba pravca OT: $\qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$

ili u parametarskom obliku: $\qquad \left.\begin{array}{l} X = x\,t \\ Y = y\,t \\ Z = z\,t \end{array}\right| \qquad$ (a)

Odatle: $dX = x\,dt; \quad dY = y\,dt; \quad dZ = z\,dt.$

Iz (a) slijedi, da je u točki $O(0, 0, 0)$ parametar $t = 0$, a u točki $T(x, y, z)$ parametar $t = 1$.

Dobijemo:

$$U(x, y, z) = \int_0^1 [(xt+3)x + (yt-1)y + (2zt+2)z]\,dt =$$

$$= \left| x\frac{t^2}{2} + 3xt + y^2\frac{t^2}{2} - yt + z^2t^2 + 2zt \right|_0^1 =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{y^2}{2} - y + z^2 + 2z$$

Do istog rezultata dolazimo računajući U prema formuli (150).

Budući da je po Stokesovoj formuli vrijednost plošnog integrala po površini S već određena vrijednošću krivuljnog integrala uzetog duž zatvorene krivulje k, koja tu plohu S omeđuje, možemo za plohu S uzeti bilo koju plohu, koju pravci paralelni s osi Z probadaju najviše u jednoj točki.

Navedimo nekoliko primjera.

1. $$\oint_K (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

uzet po nekoj zatvorenoj prostornoj krivulji k pretvori pomoću Stokesove formule u plošni integral uzet po površini S, koju ta krivulja omeđuje.

Računamo prema (194a):

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2y - 2z \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2z - 2x \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$$

$$\oint_K = 2\iint_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dx\,dz + (x-y)\,dx\,dy$$

2. Dokaži, da je krivuljni integral

$$\oint_K x^2 y^3\, dx + dy + z\, dz$$

gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, jednak plošnom integralu uzetom po površini polukugle, koju omeđuje ta kružnica k.

Najprije računamo krivuljni integral prema (184):

$$z = 0 \;;\; dz = 0 \;;\; x = R \cos t \;;\; y = R \sin t$$

$$dx = -R \sin t\, dt \;;\; dy = R \cos t\, dt$$

$$\oint_K = \int_0^{2\pi} (-R^6 \sin^4 t \cos^2 t + R \cos t)\, dt =$$

$$= -R^6 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t\, dt + R \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = \text{vidi Dio II., § 5, 7. Tip XI, 7) primjer 1.} =$$

$$= -R^6 \left| \frac{t}{16} - \frac{\sin 4t}{64} - \frac{\sin^3 2t}{48} \right|_0^{2\pi} + R \left| \sin t \right|_0^{2\pi} = -\frac{\pi R^6}{8}$$

Sada računajmo prema Stokesovoj formuli (194a) plošni integral uzet po površini polukugle:

$$z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$P = x^2 y^3 \;;\; Q = 1 \;;\; R = z$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \;;\; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \;;\; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2$$

$$\iint_S (-3x^2 y^2)\, dx\, dy =$$

Prelazimo na polarne kordinate uzevši uz to u obzir, da orijentirana normala na gornju polovinu kugline plohe zatvara s + osi Z kut $\gamma < 90°$, pa je $\cos\gamma > 0$.

Prema (111a) imamo:

$$= -3 \iint_\sigma \rho^5 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot d\rho\, d\varphi =$$

$$= -3 \left| \frac{1}{8}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right) \right|_0^{2\pi} \left| \frac{\rho^6}{6} \right|_0^R = -\frac{\pi R^6}{8}$$

Očito je, da ćemo za taj plošni integral dobiti istu vrijednost $-\frac{\pi R^6}{8}$ za sve plohe, koje su omeđene kružnicom k.

3. Gaussova formula

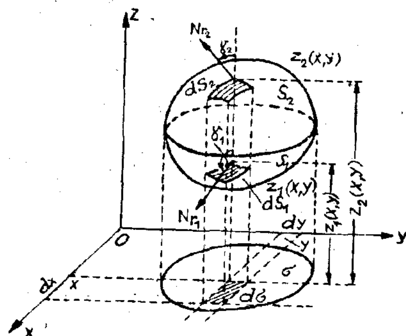
Ta formula, koja je također poznata pod imenom formule Green-Ostrogradskog, daje vezu između trostrukog ili prostornog integrala i plošnog integrala.

Neka su zadane tri funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$, koje su neprekinute zajedno sa svojim prvim parcijalnim derivacijama. Te su funkcije definirane u trodimenzionalnom području volumena V, koje je omeđeno plohom S jednadžbe $z = z(x, y)$, pri čemu za tu plohu pretpostavljamo, da je pravci paralelni s koordinatnim osima probadaju najviše u dvije točke (slika 180).

Uzmimo trostruki integral I po volumenu V zadanog područja parcijalne derivacije po z funkcije $R(x, y, z)$:

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_\sigma dx\, dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dz$$



Sl. 180

gdje je σ ortogonalna projekcija područja omeđenog plohom S na ravninu XY, a $z = z_1(x, y)$ i $z = z_2(x, y)$ jednadžbe ploha S_1 i S_2, u koje dijeli zadanu plohu S valjkasta ploha, kojom se ploha S projicira u područje σ ravnine XY.

Izvršivši deriviranje i integriranje $\left[\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\right.$ je funkcija samo od z, jer x i y smatramo, da su konstante$\Big]$, dobijemo nakon uvrštenja granica integracije:

$$I = \iint\limits_\sigma \Big\{ R\Big[x, y, z_2(x, y)\Big] - R\Big[x, y, z_1(x, y)\Big]\Big\}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_\sigma R[x, y, z_2(x, y)]\, dx\, dy - \iint\limits_\sigma R[x, y, z_1(x, y)]\, dx\, dy$$

Kako se vidi iz slike 180, orijentirana normala na element dS_1 donjeg dijela S_1 plohe zatvara s osi $+Z$ kut $\gamma_1 > 90°$, pa je $\cos\gamma_1 < 0$. Prema tome, uzevši u obzir orijentaciju plohe S_1 dobijemo:

$$I = \iint\limits_\sigma R[x, y, z_2(x, y)]\, dx\, dy + \iint\limits_\sigma R[x, y, z_1(x, y)]\, dx\, dy$$

Budući da je ravno područje σ projekcija na ravninu XY plohe S_1 i plohe S_2, oba gore dobivena dvostruka integrala jesu izrazi za plošne integrale funkcije $R(x, y, z)$ uzeti po vanjskim stranama tih ploha.

Prema tome:

$$I = \iint_{S_2} R(x, y, z)dx\,dy + \iint_{S_1} R(x, y, z)dx\,dy = \iint_{S} R(x, y, z)\,dx\,dy$$

Dobili smo, dakle:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint_S R(x, y, z)dx\,dy$$

Na isti način dobijemo:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx\,dy\,dz = \iint_S Q(x, y, z)\,dx\,dz$$

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx\,dy\,dz = \iint_S P(x, y, z)\,dy\,dz$$

Zbrojimo li te tri jednakosti, dobijemo:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_S P(x, y, z)dy\,dz + Q(x, y, z)dx\,dz + R(x, y, z)dx\,dy \tag{196}$$

To je Gaussova formula.

Ona pretvara trostruki ili prostorni integral uzet po volumenu V područja u plošni integral uzet po vanjskoj površini plohe, koja to područje volumena V omeđuje.

Kako je prema (130, 130c i d)

$$dx\,dy = dS \cdot \cos\gamma$$
$$dx\,dz = dS \cdot \cos\beta$$
$$dy\,dz = dS \cdot \cos\alpha$$

Gaussovu formulu možemo napisati i u obliku:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta +$$

$$+ R(x, y, z)\cos\gamma]\,dS \tag{196a}$$

Ako ploha S, koja omeđuje područje volumena V, ne odgovara gore navedenoj pretpostavci, da je pravci paralelni s koordinatnim osima probadaju najviše u dvije točke, tada treba plohu S podijeliti u dijelove, koji odgovaraju toj pretpostavci, primijeniti Gaussovu formulu za svaki pojedini dio plohe i rezultate zbrojiti. Na taj način možemo primijeniti Gaussovu formulu za područje omeđeno bilo kojom plohom S.

Slično tome, kako smo izračunate krivuljne integrale kontrolirali pomoću Greenove formule, tako i plošne integrale uzete po zatvorenoj plohi možemo kontrolirati pomoću Gaussove formule.

Provedimo kontrolu plošnih integrala navedenih u primjerima 2. — 4. uklj. (str. 353).

Primjer 2.

$$\iint_S (\underbrace{2x + y + z}_{P})dy\,dz + (\underbrace{x - 2y + z}_{Q})dx\,dz + (\underbrace{x - z}_{R})\,dx\,dy$$

Prema (196):

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 - 2 - 1 = -1$$

$$\iint_S = -\iiint_V dx\,dy\,dz = -V = \text{prema slici 173} = \underline{-\pi}$$

Primjer 3.

$$\iint_S (x^2 + y^2)dy\,dz + \sin z\,dx\,dz + e^{x+z}\,dx\,dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 0 + e^{x+z}$$

$$\iint_S = \iiint_V (2x + e^{x+z})dx\,dy\,dz = \text{prema slici 174} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (2x + e^{x+z})\,dz = \int_0^1 dx \left| 2xz + e^{x+z} \right|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 (2x + e^{x+1} - e^x)\,dx = \left| x^2 + e^{x+1} - e^x \right|_0^1 =$$

$$= 1 + e^2 - e - e + 1 = \underline{e^2 - 2e + 2}$$

Primjer 4.

$$\iint (2x + y - z)dy\,dz + (x - 2y + z)dx\,dz + (4x - y - z)dx\,dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 - 2 - 1 = -1$$

$$\iint_S = -\iiint_V dx\,dy\,dz = -V = \text{prema slici 175} = -\underline{\frac{1}{6}}$$

Uzmemo li, da je

$$P = x \quad ; \quad Q = y \quad \text{i} \quad R = z$$

Tada je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

pa Gaussova formula prima oblik:

$$3\iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

ili

$$V = \frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

Volumen tijela omeđenog plohom S izrazili smo pomoću plošnog integrala uzetog po površini plohe, koja to tijelo omeđuje.

Time smo dobili zanimljivu vezu između volumena tijela i plohe, koja ga omeđuje.

Izračunajmo na pr. pomoću te formule volumen piramide prikazane na slici 175.

$$V = \frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy = \text{prema primjeru 4. na str. 356} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\iint_{AOB} + \iint_{BOC} + \iint_{AOC} + \iint_{ABC}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[0 + 0 + 0 + \iint_{BOC}(1 - y - z)dy\,dz + \iint_{AOC}(1 - x - z)dx\,dz + \right.$$

$$\left. + \iint_{AOB}(1 - x - y)\,dx\,dy\right] = \frac{1}{3}\left[3 \cdot \frac{1}{6}\right] = \underline{\frac{1}{6}}$$

Navedimo još posljedicu Gaussove formule.

Pretpostavimo, da funkcije P, Q i R zadovoljavaju u području volumena V, koje je omeđeno plohom S, uvjet

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Tada iz Gaussove formule slijedi:

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dx\,dz + R(x, y, z)\,dx\,dy = 0$$

a to znači:

Vrijednost plošnog integrala $\iint_S Pdy\,dz + Qdx\,dz + Rdx\,dy$ ne ovisi o plohi, po kojoj se vrši integriranje, ako funkcije P, Q i R zadovoljavaju uvjet $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$. U tom slučaju vrijednost tog plošnog integrala zavisi samo od granica područja integriranja, t. j. od krivulje k, koja to područje omeđuje, jer su integrali protegnuti na obje plohe S_1 i S_2, koje su omeđene istom krivuljom k (vidi sl. 180), međusobno jednaki, pa stoga integral po čitavoj zatvorenoj plohi $S_1 + S_2$ mora biti nula.

Primjeri

1. Izračunaj pomoću Greenove formule

$$I = \oint_{+K} (x + y)^2\,dx - (x^2 + y^2)\,dy$$

gdje je k kontura ΔABC [$A(1, 1)$; $B(3, 2)$; $C(2,5)$] (nariši sliku trokuta).

Prema (193):

$$I = \iint_{\Delta ABC} \Big[-2x - 2(x + y) \Big] dxdy = -\iint_{\Delta ABC} (4x + 2y)\,dxdy = -I_1$$

Izračunavši jednadžbe stranica trokuta ABC:

$$AB \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; \quad BC \equiv y = -3x + 11 \quad \text{i} \quad CA \equiv y = 4x - 3$$

prelazimo na računanje I_1 prema slici trokuta.

$$I_1 = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (4x + 2y)\,dy + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11} (4x + 2y)\,dy =$$

$$= \int_1^2 \Big| 4xy + y^2 \Big|_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} dx + \int_2^3 \Big| 4xy + y^2 \Big|_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11} dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{119}{4} x^2 - \frac{77}{2} x + \frac{35}{4}\right) dx + \int_2^3 \left(-\frac{21}{4} x^2 - \frac{49}{2} x + \frac{483}{4}\right) dx =$$

$$= \left| \frac{119}{12} x^3 - \frac{77}{4} x^2 + \frac{35}{4} x \right|_1^2 + \left| -\frac{21}{12} x^3 - \frac{49}{4} x^2 + \frac{483}{4} x \right|_2^3 =$$

$$= \frac{1}{12} (2387 - 1827) = \frac{140}{3} = 46 \frac{2}{3}$$

$$\underline{I} = -I_1 = \underline{-46 \frac{2}{3}}$$

Izračunaj sada zadani integral neposredno, tj. kao krivuljni. Moraš dobiti isti rezultat.

2. Izračunaj pomoću Stokesove formule integral

$$I = \int_{+K} (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz$$

gdje je k šesterokut, u kojem ravnina $x + y + z = \frac{3}{2} a$ siječe plohe kocke $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = a$; $z = 0$, $z = a$.

Označivši plohe kocke kao na slici 174 i urisavši zadanu ravninu i presječnicu tj. šesterokut, koji označimo s $KLMNPR$, prelazimo na računanje zadanog integrala I prema (194a).

$$I = \iint_S (-2y - 2z)\, dydz + (-2z - 2x)\, dxdz + (-2x - 2y)\, dxdy =$$

$$= -2 \iint_S (y + z)\, dydz + (x + z)\, dxdz + (x + y)\, dxdy$$

gdje je S prednji dio površine kocke, što ga odsjeca zadana ravnina.

$$I = -2 \left[\iint_{\Delta KDL} + \iint_{GFENP} + \iint_{\Delta MEN} + \iint_{KDFGR} + \iint_{\Delta PGR} + \iint_{DLMEF} \right] \qquad (a)$$

$$\iint_{\Delta KDL} = (z = 0, dz = 0, \cos\gamma = \cos 180^0 = -1) =$$

$$= -\iint_{\Delta KDL} (x + y)\, dxdy = -\int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int_{-x+\frac{3}{2}a}^{a} (x + y)\, dy =$$

$$= -\int_{\frac{a}{2}}^{a} \left| xy + \frac{y^2}{2} \right|_{-x+\frac{3}{2}a}^{a} dx = -\int_{\frac{a}{2}}^{a} \left(\frac{x^2}{2} + ax - \frac{5}{8} a^2\right) dx =$$

$$= -\left| \frac{x^3}{6} + \frac{a}{2} x^2 - \frac{5}{8} a^2 x \right|_{\frac{a}{2}}^{a} = -\frac{5}{24} a^3$$

$$\iint_{GFENP} = (z = 1, dz = 0, \cos\gamma = \cos 0 = 1) =$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-x+\frac{a}{2}}^{a} (x+y)\,dy + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int_0^a (x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} \left| xy + \frac{y^2}{2} \right|_{-x+\frac{a}{2}}^{a} dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \left| xy + \frac{y^2}{2} \right|_0^a dx =$$

$$= \left| \frac{x^3}{6} + \frac{a}{2}x^2 + \frac{3}{8}a^2 x \right|_0^{\frac{a}{2}} + \left| \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2}{2}x \right|_{\frac{a}{2}}^{a} = \frac{23}{24}a^3$$

$$\iint_{\Delta MEN} = (x = 0,\ dx = 0;\ \cos\alpha = \cos 180^\circ = -1) =$$

$$= -\iint_{\Delta MEN} (y+z)\,dy\,dz = -\int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_{-x+\frac{3}{2}a}^{a} (y+z)\,dz = -\frac{5}{24}a^3$$

$$\iint_{KDFGR} = (x = 1,\ dx = 0;\ \cos\alpha = \cos 0 = 1) =$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{-x+\frac{a}{2}}^{a} (y+z)\,dz + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_0^a (y+z)\,dz = \frac{23}{24}a^3$$

$$\iint_{\Delta PGR} = (y = 0,\ dy = 0;\ \cos\beta = \cos 180^\circ = -1) =$$

$$= -\iint_{\Delta PGR} (x+z)\,dxdz = -\int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int_{-x+\frac{3}{2}a}^{a} (x+z)\,dz = -\frac{5}{24}a^3$$

$$\iint_{DLMEF} = (y = 1,\ dy = 0;\ \cos\beta = \cos 0 = 1) =$$

$$= \int_a^{\frac{a}{2}} dx \int_{-x+\frac{a}{2}}^{a} (x+z)\,dz + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int_0^a (x+z)\,dz = \frac{23}{24}a^3$$

Prema (a):

$$I = -2\left(-\frac{5}{24}a^3 + \frac{23}{24}a^3 - \frac{5}{24}a^3 + \frac{23}{24}a^3 - \frac{5}{24}a^3 + \frac{23}{24}a^3\right)$$

$$\underline{I = -\frac{9}{2}a^3}$$

3. Izračunaj pomoću Gaussove formule

$$I = \iint_S x^3\, dydz + y^3\, dxdz + z^3\, dxdy$$

gdje je S površina kugle $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Prema (196): $$I = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$$

Prema (117) i (118a):

$$x = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi; \quad y = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi; \quad z = \varrho \cos\vartheta$$

$$dxdydz = \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, d\varrho$$

$$I = 3 \iiint_V \varrho^2 \left[\sin^2\vartheta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\vartheta\right] \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, d\varrho =$$

$$= 3 \iiint_V \varrho^4 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, d\varrho =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{a} \varrho^4\, d\varrho = 3 \cdot 2\pi \left| -\cos\varphi \right|_0^{\pi} \cdot \frac{a^5}{5} =$$

$$= \frac{6}{5} \pi \cdot 2 a^5 = \underline{\frac{12}{5} \pi a^5}$$

Izračunaj

1. Pomoću Greenove formule krivuljne integrale:

$$\text{a)} \oint_{+K} xy^2\, dy - x^2 y\, dx$$

gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = r^2$

$$\left[\frac{\pi r^4}{2}\right]$$

$$\text{b)} \oint_{+K} (x + y)\, dx - (x - y)\, dy$$

gdje je k elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$[-2ab\pi]$

$$\text{c)} \oint_{+K} e^x (1 - \cos y)\, dx - e^x (y - \sin y)\, dy$$

gdje je k kontura područja omeđenog odreskom osi X i sinusoidom od $x = 0$ do $x = \pi$

$$\left[-\frac{1}{5}\left(e^{\pi} - 1\right)\right]$$

$$\text{d)} \oint_{+K} e^{-(x^2 + y^2)} (\cos 2xy\, dx + \sin 2xy\, dy)$$

gdje je k kružnica $x^2 + y^2 = r^2$

$[0]$

2. Pomoću krivuljnih integrala [formula (193a)] površine omeđene krivuljama
a) elipsom

$$x = a \cos t; \; y = b \sin t \qquad [ab\pi]$$

b) astroidom

$$x = a\cos^3 t\,;\; y = b\sin^3 t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad \left[\frac{3}{8}\,ab\pi\right]$$

3. Pomoću Gaussove formule

$$\iint_S x^2\,dydz + y^2\,dxdz + z^2\,dxdy$$

gdje je S površina kocke $x = 0, x = a; y = 0, y = a; z = 0, z = a.$

$[3a^4]$

4. Pomoću Gaussove formule pretvori zadane plošne integrale uzete po zatvorenim površinama S u prostorne po volumenima V, koje te plohe S omeđuju.

a) $$\iint_S x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$$

$[3\,V]$

b) $$\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$$

$$\left[2\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$$

5. Izračunaj

$$\oint_{+K} (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$$

gdje je $K \equiv \begin{cases} x^2+y^2 = 2rx \\ x^2+y^2+z^2 = 2Rx \end{cases} \qquad (R > r; z > 0)$

a) pomoću Stokesove formule.
b) neposredno kao krivuljni integral.

$[2\pi R r^2]$

6. Isto za

$$\oint_{+K} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$$

$$K \equiv \begin{cases} x^2+y^2 = ax \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 \end{cases} \qquad (z > 0)$$

$$\left[-\frac{\pi a^3}{4}\right]$$

7. Izračunaj

$$\iint_S x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$$

gdje je S sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$
a) pomoću Gaussove formule,
b) neposredno kao plošni integral.

$[4\pi]$

§ 13. VEKTORSKA ANALIZA

1. Usmjerena derivacija. Gradijent skalarne funkcije $U(x, y, z)$

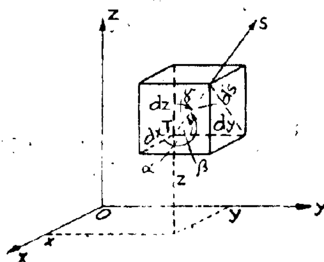
Da što potpunije shvatimo pojam gradijenta, izvedimo najprije formulu za derivaciju funkcije $U = U(x, y, z)$ u smjeru s, koji je određen kutovima α, β i γ, što ih taj smjer zatvara s koordinatnim osima X, Y i Z.

Za funkciju $U(x, y, z)$ pretpostavljamo, da je definirana u nekom trodimenzionalnom području i da je neprekinuta zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama.

Napišimo totalni diferencijal funkcije $U(x, y, z)$:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad / : ds$$

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds} \qquad \text{(a)}$$



Sl. 181

Smatrajući prema slici 181, da su dx, dy i dz beskonačno male veličine, imamo:

$$\frac{dy}{ds} = \cos\beta$$

Analogno

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha \qquad (197)$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

Uvrštenje u (a) daje traženu formulu za derivaciju funkcije $U(x, y, z)$ u točki $T(x, y, z)$ u smjeru $s(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \qquad (198)$$

Vidimo, da vrijednost derivacije $\frac{dU}{ds}$ ovisi ne samo o točki $T(x, y, z)$, u kojoj smo računali derivaciju, već i o smjeru deriviranja $s(\alpha, \beta, \gamma)$. Naš je slijedeći zadatak, da odredimo u točki T onaj smjer, u kojem derivacija ima maksimalnu vrijednost, kao i smjer, u kojem je derivacija jednaka nuli. Najjednostavnije možemo taj problem riješiti pomoću vektora.

U području, u kojem je definirana funkcija $U(x, y, z)$, definirajmo vektorsko polje tako, da svakoj točki $T(x, y, z)$ toga područja dodijelimo jedan vektor, kojemu su komponente, t. j. projekcije u koordinatne osi X, Y i Z, vrijednosti parcijalnih derivacija po x, y i z funkcije $U(x, y, z)$ u toj točki T. Taj vektor zove se g r a d i j e n t s k a l a r n e f u n k c i j e $U(x, y, z)$ i označuje se s *grad U*.

$$\text{grad } U \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Prema tome je vektor

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

Njegova je apsolutna vrijednost ili duljina:

$$\left|grad\ U\right| = +\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \tag{199}$$

Njegovi su kosinusi smjera:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{|grad\ U|}\ ; \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{|grad\ U|}\ ; \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{|grad\ U|}.$$

Sl. 182 prikazuje vektor *grad U* neke funkcije $U(x, y, z)$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$.

Općenito možemo kazati: pripada li svakoj točki nekog područja određeni vektor, tada postoji u tom području **polje vektora ili vektorsko polje.** U našem slučaju imamo vektorsko polje gradijenta funkcije $U(x, y, z)$.

Uvedimo još jedan vektor i. to jedinični vektor $\vec{s}_0$, u čijem smo smjeru derivirali funkciju $U(x, y, z)$.

Kako znamo, komponente su orta njegovi kosinusi smjera:

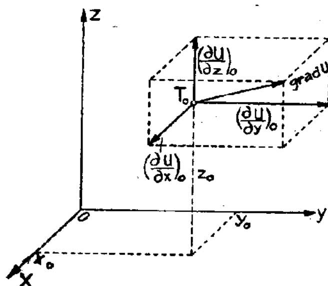
$$\vec{s}_0 \begin{cases} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{cases}$$

Uočimo li sada formulu (198) za derivaciju funkcije U u smjeru s, vidimo, da ona predočuje zbroj produkata istoimenih komponenata vektora *grad U* i $\vec{s}_0$, t. j. prema (18) njihov skalarni produkt:

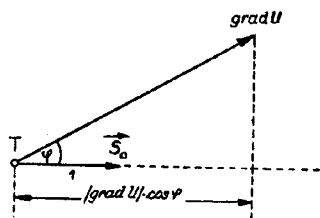
$$\frac{dU}{ds} = grad\ U \cdot \vec{s}_0$$

ili prema (11):

$$\frac{dU}{ds} = \left|grad\ U\right| \cdot 1 \cdot \cos\varphi \tag{a}$$



Sl. 182



Sl. 183

gdje je φ kut između *grad U* i vektora $\vec{s}_0$, u čijem smo smjeru derivirali (slika 183).

Iz slike 183 vidimo, da je $|grad\ U| \cdot \cos\varphi$ projekcija *grad U* u smjeru deriviranja $\vec{s}_0$, pa možemo kazati: derivacija funkcije u zadanom smjeru jednaka je projekciji gradijenta funkcije u smjer deriviranja.

Iz formule (a) možemo izvesti dva važna svojstva gradijenta.

Vrijednost $|grad\ U|$ je konstantna u svakoj točki polja gradijenta, dakle vrijednost $\frac{dU}{ds}$ u svakoj točki polja ovisi prema (a) jedino o $\cos\varphi$, odnosno o φ, dakle jedino o smjeru deriviranja.

Pretpostavimo, da deriviramo u smjeru gradijenta, t. j. uzmimo, da je $\varphi = 0$. U tom slučaju prima $\cos\varphi$, a dakle i $\frac{dU}{ds}$ svoju maksimalnu vrijednost u dotičnoj točki polja, pa je prema (a):

$$\left(\frac{dU}{ds}\right)_{maks} = \left|grad\ U\right| \cdot 1 = \left|grad\ U\right| \qquad \text{(b)}$$

To znači, $\frac{dU}{ds}$ postizava maksimum u nekoj točki $T(x, y, z)$ područja definicije funkcije U, ako deriviramo u smjeru gradijenta, koji pripada dotičnoj točki polja, i ta je maksimalna vrijednost derivacije jednaka apsolutnoj vrijednosti gradijenta.

Uzmimo li u obzir, da derivacija $\frac{dU}{ds}$ daje brzinu, s kojom se mijenja funkcija U pri pomaku u smjeru s, i da predznak derivacije pokazuje, da li funkcija raste ili opada, tada iz jednakosti (b) razabiremo prvo svojstvo gradijenta:

Vektor *grad U* u svakoj točki polja ima onaj smjer, u kojem se funkcija U najbrže mijenja, a apsolutna vrijednost gradijenta daje brzinu te maksimalne promjene funkcije.

Pretpostavimo sada, da deriviramo u smjeru okomitom na gradijent, t. j. uzmimo, da je $\varphi = 90°$

Tada prema (a) imamo:

$$\frac{dU}{ds} = \left|grad\ U\right| \cdot 0 = 0$$

To znači, deriviramo li u smjeru okomitom na gradijent, promijena je funkcije jednaka nuli.

Uvedimo pojam nivo-ploha funkcije $U = U(x, y, z)$. U tu svrhu stavimo da je $U = C$ (konstanta). Dobijemo:

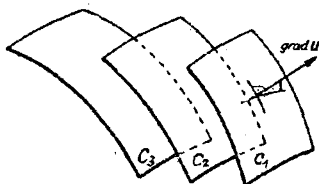
$$U(x, y, z) = C$$

ili eksplicitno

$$z = f(x, y, C)$$

To je funkcija dviju nezavisnih promjenljivih x i y, predočuje dakle neku plohu.

Mijenjamo li po volji vrijednost konstante C dajući joj vrijednost $C_1, C_2, C_3, \ldots$, dobijemo familiju ploha. To su nivo-plohe funkcije $U = U(x, y, z)$ (vidi sl. 184).



Sl. 184

Giba li se točka $T(x, y, z)$ po jednoj od nivo-ploha, na pr. po onoj, kojoj odgovara vrijednost C_1 konstante C, funkcija U se ne mijenja, jer ima uvijek vrijednost C_1. Malo prije smo rekli: ako deriviramo funkciju U u smjeru okomitom na gradijent, promjena je funkcije jednaka nuli. Iz toga slijedi drugo svojstvo gradijente funkcije $U(x, y, z)$:

Vektor *grad* U stoji uvijek okomito na onu nivo-plohu funkcije $U(x, y, z)$, koja prolazi njegovom početnom točkom. Drugim riječima, gradijent ima u svakoj točki smjer normale pripadne nivo-plohe.

Pomoću tog drugog svojstva gradijenta možemo lako izvesti formulu za kut dviju ploha, pod kojim se razumije kut njihovih normala.

Neka se traži kut φ, što ga međusobno zatvaraju zadane plohe $G(x, y, z) = 0$ i $H(x, y, z) = 0$. Obje plohe možemo smatrati kao nivo-plohe funkcija

$$G = G(x, y, z) \quad \text{i} \quad H = H(x, y, z) \quad \text{uz} \quad G = 0 \quad \text{i} \quad H = 0,$$

t. j. uzevši $C = 0$, pa se zadatak svodi na određivanje kuta, što ga međusobno zatvaraju gradijenti funkcija G i H, koji, kako znamo, imaju smjer normala na nivo-plohe.

Prema (199):

$$\text{grad } G = \frac{\partial G}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial G}{\partial z}\vec{k}$$

$$\text{grad } H = \frac{\partial H}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial H}{\partial z}\vec{k}$$

i prema (19) imamo:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{\partial G}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2}} \tag{200}$$

Navedimo primjer.

Odredi veličinu i smjer najveće promjene funkcije $U = x^3 y^2 z$ u točki $T_0(2, 3, 4)$.

Zadatak se svodi na određivanje *grad* U, njegove apsolutne vrijednosti i smjera u točki T_0.

Računamo prema (199):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y^2 z \quad , \quad \text{a u točki } T_0(2, 3, 4): \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = 432$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^3 y z \quad ; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = 192$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^3 y^2 \quad ; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0 = 72$$

$$\text{grad } U = 432\vec{i} + 192\vec{j} + 72\vec{k}$$

Maksimalna veličina promjene funkcije u točki $T_0(2, 3, 4)$ =

$$= +\sqrt{432^2 + 192^2 + 72^2} \doteq \underline{478}$$

Smjer maksimalne promjene funkcije u točki T_0:

$$\cos\alpha = \frac{432}{478} = 0{,}903 \qquad \underline{\alpha \doteq 25°30'}$$

$$\cos\beta = \frac{192}{478} = 0{,}402 \qquad \underline{\beta \doteq 66°20'}$$

$$\cos\gamma = \frac{72}{478} = 0{,}149 \qquad \underline{\gamma \doteq 81°20'}$$

Na početku ovog poglavlja izveli smo formulu (198) za derivaciju funkcije $U(x, y, z)$ u smjeru $s(\alpha, \beta, \gamma)$, t. j. $\frac{dU}{ds}$. Ta usmjerena derivacija piše se često u obliku:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\overleftarrow{\partial} U}{\partial \vec{s}_0}$$

gdje je $\vec{s}_0$ jedinični vektor, u čijem se smjeru derivira.

Malo prije u izrazu (a) prikazali smo $\frac{dU}{ds}$ kao skalarni produkt vektora *grad U* i jediničnog vektora $\vec{s}_0$, u čijem se smjeru deriviralo:

$$\frac{dU}{ds} = grad\ U \cdot \vec{s}_0$$

Slijedi:

$$\frac{\overleftarrow{\partial} U}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0\, grad\ U \qquad \textbf{(198a)}$$

Derivacija funkcije $U(x, y, z)$ u smjeru s jednaka je skalarnom produktu jediničnog vektora $\vec{s}_0$, uzetog u tom smjeru s, i gradijenta funkcije U.

Na pr. za $\vec{s}_0 = \vec{i}$ dobijemo derivaciju funkcije U u smjeru osi X, t. j. $\frac{dU}{dx}$:

$$\frac{\overleftarrow{\partial} U}{\partial \vec{i}} = \vec{i} \cdot grad\ U = \vec{i}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = \text{prema (16) i (13)} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Na isti način dobijemo:

$$\frac{\overleftarrow{\partial} U}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial U}{\partial y}\ ; \quad \frac{\overleftarrow{\partial} U}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Primjer

Odredi derivaciju funkcije $U = x\,y\,z$ u točki A (5, 1, 2) u smjeru od A prema B (9, 4, 14).

Prema (8):

$$\vec{AB} = \vec{s} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\vec{s}_0 = \frac{4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = \frac{4}{13}\vec{i} + \frac{3}{13}\vec{j} + \frac{12}{13}\vec{k}.$$

Prema (198 a):

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0 \, grad\, U = \frac{4}{13}\, y\,z + \frac{3}{13}\, x\,z + \frac{12}{13}\, x\,y$$

a u tački A (5, 1 2):

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{s}_0} = \frac{4}{13} \cdot 2 + \frac{3}{13} \cdot 10 + \frac{12}{13} \cdot 5 = \underline{\frac{98}{13}}$$

Pretpostavimo, da je zadana funkcija z funkcija dviju nezavisnih promjenljivih x i y, t. j. $z = z(x, y)$, koja je definirana u nekom ravnom području σ ravnine XY. U tom slučaju definiramo u tom području **ravno** polje gradijenta funkcije z tako, da svakoj točki područja dodijelimo vektor, kojemu su komponente $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$. Tada formule (199) primaju za funkciju $z = z(x, y)$ oblik:

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

$$|grad\ z| = +\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \tag{201}$$

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{|grad\ z|}\ ; \quad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{|grad\ z|}$$

Za $z = C =$ konstanta dobijemo sada **nivo-krivulje** $z(x, y) = C$, pa vektor *grad* z stoji okomito na onoj nivo-krivulji, koja prolazi njegovom početnom točkom, t. j. ima smjer normale pripadne nivo-krivulje.

Primjeri

1. Odredi derivaciju funkcije $U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$,

u zadanoj točki T (x, y, z) u smjeru radijvektora $\vec{r}$ te točke

Prema (198), (18) i (4) dobijemo:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma =$$

$$= grad\, U \cdot \vec{r}_0 = \frac{2x}{a^2} \cdot \frac{x}{r} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{y}{r} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{z}{r} =$$

$$= \frac{2}{r}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = \underline{\frac{2U}{r}}$$

2. Odredi kut, pod kojim se sijeku valjak $x^2 + y^2 = a^2$ s plohom $bz = xy$ u točki T_0 (x_0, y_0, z_0)

Napisavši jednadžbe zadanih ploha u obliku

$$G = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

$$H = xy - bz = 0$$

računamo prema (200):

$$\cos\varphi = \frac{2x \cdot y + 2y \cdot x + 0 \cdot (-b)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{y^2 + x^2 + b^2}} = \frac{2\,bz}{a\sqrt{a^2 + b^2}}$$

jer iz jednadžbi zadanih ploha slijedi, da je $xy = bz$, a $x^2 + y^2 = a^2$

U točki T_0 (x_0, y_0, z_0):

$$\underline{\cos\varphi = \frac{2\,bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

3. Odredi pomoću *grad f* jednadžbe normale n_0 i tangentne ravnine E_t na hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ u točki T_0 (3, 5, — 4).

$$G = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 18 = 0$$

$$grad\ f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

a u točki T_0 (3, 5, — 4):

$$(grad\ f)_0 = 6\vec{i} + 10\vec{j} + 8\vec{k}$$

Kako je $(grad\ f)_0$ usporedan s normalom n_0, odnosno okomit na tangentnoj ravnini E_t, dobijemo prema (38):

$$n_0 \equiv \frac{x-3}{6} = \frac{y-5}{10} = \frac{z+4}{8},$$

ili

$$\underline{\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+4}{4}}$$

a prema (50a) i (58):

$$E_t \equiv 3(x-3) + 5(y-5) + 4(z+4) = 0$$

ili

$$\underline{3x + 5y + 4z - 18 = 0}$$

4. Odredi najveći uspon plohe $z = x^y$ u točki $T_0(2, 2)$.

Zadatak se svodi na određivanje smjera *grad z* u točki T_0.

Računamo prema (201):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\,x^{y-1} \quad ; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot ln\,x\ ; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 2^2 \cdot ln\,2 = 4 \cdot \frac{0{,}301}{M} = \frac{4 \cdot 0{,}301}{0{,}434} = 2{,}77$$

$$grad\, z = 4\vec{i} + 2{,}77\vec{j} \quad ; \quad \left| grad\, z \right| = +\sqrt{16 + 7{,}67} \doteq 4{,}86 \; ; \quad \cos\alpha = \frac{4}{4{,}86} = 0{,}825,$$

odatle
$$\alpha \doteq 34°30'$$

To znači: u smjeru, koji zatvara s osi $+X$ kut $\alpha = 34°30'$, ima funkcija $z = y^y$ u točki $T_0(2, 2)$ maksimalnu promjenu, koja iznosi 4,86 pri pomaku za 1 u tom smjeru α. Prema tome kut φ najvećeg uspona plohe $z = y^y$ u točki $T_0(2, 2)$ dobijemo iz

$$tg\, \varphi = \frac{4{,}86}{1} = 4{,}86$$

Odatle
$$\varphi \doteq 78°24'$$

Odredi:

1. Veličinu i smjer maksimalne primjene funkcije $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ u točki $T_0(16, 16, 8)$.

$$\left[grad\; U = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}\right]$$

2. Koordinate one točke polja, u kojoj je gradijent funkcije

$$U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

jednak nuli.

$$[-2, 1, 1]$$

3. Derivaciju funkcije $U(x, y, z)$ u smjeru gradijenta funkcije $V(x, y, z)$. U kojem je slučaju ta derivacija jednaka nuli?

$$\left[\frac{grad\, U \cdot grad\, V}{|grad\, V|} ; \frac{\partial U}{\partial s} = 0, \text{ kad je } grad\, U \perp grad\, V\right]$$

4. Najveći uspon plohe $z = ln(x^2 + 4y^2)$ u točki $T_0(6, 4)$.

$$[\varphi \doteq 18°50']$$

5. Kut između gradijenata funkcija

$$z = arc\, sin \frac{x}{x + y} \quad \text{u točkama } (1, 1) \text{ i } (3, 4).$$

$$[\varphi \doteq 8°]$$

$$U = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{u točkama } (1, 2, 2) \text{ i } (-3, 1, 0).$$

$$\left[\cos\varphi = -\frac{8}{9}\right]$$

2. Potencijal

Sada, kada smo upoznali i shvatili pojam gradijenta, ne će nam biti teško, da shvatimo i pojam potencijala. Golema važnost tog pojma vidi se iz toga, što je razvoj čitave matematičke analize posljednjeg stoljeća išao u znaku teorije potencijala, koja je nikla iz konkretnih potreba fizike i mehanike.

Izvodeći pojam gradijenta rekli smo, da u nekom području postoji vektorsko polje, ako svakoj točki toga područja pripada određen vektor. U slučaju gradijenta taj je vektor bio određen parcijalnim derivacijama po koordinatama zadane skalarne funkcije $U(x, y, z)$, pri čemu su vrijednosti tih parcijalnih derivacija u svakoj

pojedinoj točki područja određivale komponente vektora *grad* U u smjeru koordinatnih osi. Sada ćemo definirati u nekom dijelu prostora općenitije vektorsko polje i to tako, da svakoj točki toga dijela prostora dodijelimo vektor $\vec{v}$, kojemu su komponente u smjeru koordinatnih osi

$$P(x, y, z), \qquad Q(x, y, z) \quad \text{i} \quad R(x, y, z),$$

gdje su P, Q i R funkcije, koje su neprekinute zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama. Uvrstimo li u te tri funkcije koordinate x_1, y_1 i z_1 bilo koje točke područja definicije tih funkcija, dobit ćemo tri vrijednosti, koje će dati komponente u smjeru osiju X, Y i Z onog vektora, koji pripada dotičnoj točki T_1 polja, a vektor, kako znamo, posve je određen s tri svoje komponente.

Ukratko: svakoj točki $T(x, y, z)$ dotičnog područja dodijelili smo vektor

$$\vec{v} = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

Pretpostavimo sada, da je naše **vektorsko polje polje gradijenta funkcije** $U(x, y, z)$, t. j.

$$v_x = P(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$v_y = Q(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$v_z = R(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z}$$

U tom slučaju funkcija $U(x, y, z)$ zove se **potencijalna funkcija** ili **potencijal** ili **funkcija sila** vektorskog polja $\vec{v}$.

Prema tome **potencijalom zadanog vektorskog polja zove se ona funkcija, čije parcijalne derivacije po x, y i z u svakoj točki polja daju komponente u smjeru koordinatnih osi onog vektora, koji pripada dotičnoj točki polja.**

Primijetimo, da iz navedenog nikako ne slijedi, da je svako vektorsko polje polje gradijenta neke funkcije, t. j. da ima potencijal. Drugim riječima, svaki sustav funkcija

$$P(x, y, z), \qquad Q(x, y, z), \qquad R(x, y, z)$$

ne mora zadovoljavati uvjet, da su te funkcije parcijalne derivacije po x, y i z jedne te iste funkcije $U = U(x, y, z)$.

Primijetimo još, da su pojmovi gradijenta i potencijala u nekom smislu inverzni pojmovi, kao na pr. pojmovi derivacije i primitivne funkcije. Slično tome kako derivaciju dobijemo derivirajući primitivnu funkciju, a primitivnu funkciju dobijemo integrirajući derivaciju, tako i promjenljiva **vektorska** veličina *grad* U ima diferencijalni karakter pa se dobije iz potencijala $U(x, y, z)$ deriviranjem, dok promjenljiva, **skalarna** veličina — potencijal $U(x, y, z)$ ima prema tome integralni karakter.

Nivo-plohe potencijalne funkcije $U = U(x, y, z)$

$$U(x, y, z) = \text{const}$$

zovu se **ekvipotencijalne plohe**, jer se vrijednost potencijala $U(x, y, z)$ ne mijenja za sve točke, koje leže na jednoj nivo-plohi.

Navedimo primjer polja vektora, koji ima potencijal. Taj primjer će olakšati razumijevanje uvedenih pojmova i pokazati njihovo fizičko značenje.

Pretpostavimo, da se u ishodištu O koordinatnog sustava nalazi materijalna točka mase m, a u nekoj drugoj točki $T(x, y, z)$ prostora, koja je udaljena za r od O materijalna točka mase 1 (sl. 185). Tada nastaje u čitavom prostoru vektorsko polje — polje sila privlačenja prema točki O.

Po Newtonovu zakonu veličina sila privlačenja između točaka O i T iznosi:

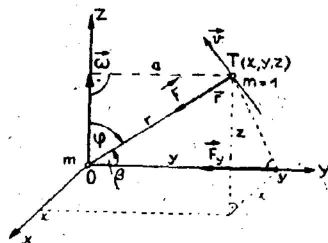
$$F = \frac{m \cdot 1}{r^2} \qquad \text{(a)}$$

(uzeto je, da je gravitaciona konstanta $f = 1$).

Izračunajmo komponente sile privlačenja F u smjeru koordinatnih osi.

Prema slici 185:

$$F_y = -F \cdot \cos\beta$$



Sl. 185

a kako je prema istoj slici $\cos\beta = \frac{y}{r}$, imamo uzevši u obzir (a):

$$F_y = -\frac{my}{r^3}$$

Na isti način dobijemo:

$$F_x = -\frac{mx}{r^3} \qquad \text{(b)}$$

$$F_z = -\frac{mz}{r^3}$$

Polje sila privlačenja glasi dakle:

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3}x\vec{i} - \frac{m}{r^3}y\vec{j} - \frac{m}{r^3}z\vec{k} =$$

$$= -\frac{m}{r^3}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = -\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

Tvrdimo, da polje sila privlačenja, koje promatramo, potječe od potencijala:

$$U(x, y, z) = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

U tu svrhu treba dokazati, da je

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{r}\right)$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m}{r}\right)$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m}{r}\right)$$

Računamo:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{r}\right) = -\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{m}{r^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{mx}{r^3} = \text{prema (b)} = F_x$$

Na isti način dobijemo:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{my}{r^3} = F_y$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{mz}{r^3} = F_z$$

Dokazali smo, da su parcijalne derivacije po x, y i z funkcije $U = \frac{m}{r}$ jednake komponentama sila privlačenja u bilo kojoj točki polja sila.

Možemo dakle kazati: funkcija $U(x, y, z) = \frac{m}{r}$ je potencijal polja sila privlačenja, što ga stvara u prostoru materijalna točka mase m, ili: polje sila privlačenja točke mase m je polje gradijenta funkcije

$$U = \frac{m}{r}\ , \quad \text{jer je } F_x = \frac{\partial U}{\partial x}\ , \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{i} \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Da odredimo ekvipotencijalne plohe polja sila gravitacije, stavimo

$$U = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C$$

odatle je

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{m^2}{C^2}$$

a to su koncentrične kugline plohe sa središtem u ishodištu O.

Znamo, da gradijent stoji uvijek okomito na onoj nivo-plohi, koja prolazi njegovom početnom točkom. Budući da je polje sila privlačenja točke mase m polje gradijenta U, silnice toga polja sila su poluzrake, koje izlaze iz točke O.

Iz navedenoga vidimo, da je potencijal funkcija mjesta i to samo funkcija mjesta, jer su vrijednosti potencijala posve određene, čim su zadane koordinate točke. Stoga razloga zove se sistem sila, koji potječe od potencijala, konzervativni sistem sila, jer veličina, smjer i smisao svake sile toga sistema, koja pripada nekoj točki prostora i čije su komponente jednake parcijalnim derivacijama po x, y i z potencijala, ovise jedino o položaju dotične točke, odnosno o njenim koordinatama.

Tako, na pr., polje zemljine teže, koja je rezultanta sile privlačenja i centrifugalne sile, čini konzervativni sistem sila, jer potječe od potencijala, koji je jednak zbroju potencijala sile privlačenja i centrifugalne sile. (Potanko o tome vidi od istog pisca Gravimetrija s osobitim obzirom na Eötvösov variometar, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1949).

Sve što smo rekli za prostorno vektorsko polje vrijedi i za ravno vektorsko polje, ako je ono polje gradijenta, jer se na isti način definiraju potencijal, ekvipotencijalne krivulje i silnice toga polja. Slično se definira i samo ravno vektorsko polje i to tako, da se svakoj točki nekog dijela ravnine dodijeljuje vektor, kojemu su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ komponente u smjeru koordinatnih osi X i Y.

$U(x, y)$ je potencijal toga ravnog vektorskog polja, ako je

$$P = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{i} \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}$$

t. j. ako je to ravno vektorsko polje polje gradijenta funkcije $U(x, y)$.

Potencijal ravnog polja sila privlačenja stvorenog u ravnini materijalnom točkom mase m opet je funkcija

$$U(x, y) = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Mjesto mase m materijalne točke može se uzeti kao izvor polja sila električni naboj. Svi izvodi ostanu isti, jer su Coulombov zakon, koji određuje silu uzajamnog djelovanja dvaju naboja, i Newtonov zakon gravitacije identični. Tako se mogu zorno predočiti ekvipotencijalne krivulje i silnice u poznatom pokusu sa željeznom piljevinom.

O potencijalu vidi još dalje isti §, točka 4.

3. Vektorski oblik Gaussove formule. Divergencija vektorskog polja

Da prikažemo Gaussovu formulu (196a)

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_S [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta +$$
$$+ R(x, y, z)\cos\gamma]\, dS$$

u vektorskom obliku, definirajmo u području volumena V, koje je omeđeno plohom S, vektorsko polje tako, da svakoj točki $T(x, y, z)$ toga područja dodijelimo

vektor $\vec{v}$, kojemu su komponente u smjeru koordinatnih osi vrijednosti funkcija P, Q i R u dotičnoj točki $T(x, y, z)$ područja, t. j.

$$\vec{v} \begin{cases} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{cases} \qquad \vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Tada se izraz $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, koji se nalazi na lijevoj strani Gaussove formule, zove divergencija vektora $\vec{v}$ u točki $T(x, y, z)$ polja i označuje se s $div\,\vec{v}$

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{202}$$

pa lijeva strana Gaussove formule prima oblik:

$$\iiint_V div\,\vec{v}\,dx\,dy\,dz$$

Da prikažemo i desnu stranu Gaussove formule u vektorskom obliku, uvedimo još jedinični vektor $\vec{n}_0$ vanjske normale na plohu S, koja omeđuje volumen V:

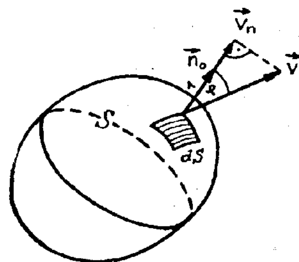
$$\vec{n}_0 \begin{cases} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{cases}$$

Tada predočuje integrand

$$P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

desne strane Gaussove formule skalarni produkt vektora $\vec{v}$ i vektora $\vec{n}_0$:

$$P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \vec{v}\,\vec{n}_0 = v \cdot 1 \cdot \cos\varphi =$$



Sl. 186

= prema slici 186 = v_n, gdje je $\vec{v}_n$ komponenta vektora $\vec{v}$ u smjeru i smislu vanjske normale na plohu S.

Desna strana Gaussove formule prima dakle oblik

$$\iint_S v_n\,dS$$

Time smo dobili Gaussovu formulu u vektorskom obliku:

$$\iiint_V div\, \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iint_S v_n\, dS \qquad (203)$$

Ta formula kazuje: trostruki ili prostorni integral divergencije vektora $\vec{v}$ uzet po zatvorenom volumenu V jednak je plošnom integralu normalne komponente vektora $\vec{v}$ protegnutom na plohu S, koja taj volumen V omeđuje.

Izraz $v_n\, dS$ zove se element istjecanja ili fluks vektora $\vec{v}$ kroz element dS plohe S u smjeru vanjske normale, a $\iint_S v_n\, dS$ jest totalni tok ili fluks vektora $\vec{v}$ kroz zatvorenu plohu S i to okomito na tu plohu.

Da što potpunije shvatimo značenje Gaussove formule, provedimo hidrodinamičku interpretaciju te formule. U tu svrhu dajmo vektoru $\vec{v}$ posebno značenje: vektor $\vec{v}$ neka predočuje po veličini i smjeru u svakoj točki T područja volumena V brzinu strujanja tekućine, koja se nalazi u tom području, a teče prema plohi S u smjeru vanjske normale. Time smo definirali vektorsko polje brzina strujanja.

Pretpostavimo li, da je strujanje tekućine stacionarno, t. j. da ovisi jedino o položaju čestice tekućine, a ne ovisi na pr. o vremenu ili temperaturi, i da je tekućina nestlačiva, tada izraz $v_n\, dS$ daje množinu tekućine istekle u jednoj sekundi kroz element površine dS u smjeru vanjske normale, a $\iint_S v_n\, dS$ — množinu tekućine, koja je istekla u jednoj sekundi kroz čitavu plohu S u smjeru vanjske normale na tu plohu S. Očito je, da strujanje prema unutrašnjosti područja daje gornjim izrazima negativni predznak.

U toj hidrodinamičkoj interpretaciji Gaussova formula glasi: divergencija vektorskog polja brzina strujanja tekućine protegnuta na područje volumena V, koje je omeđeno zatvorenom plohom S, jednaka je množini tekućine, koja istječe u jednoj sekundi kroz plohu S u smjeru vanjske normale.

To znači: divergencija je mjera izdašnosti izvora, koji se nalaze u području volumena V omeđenog zatvorenom plohom S.

Gaussov stavak možemo sada formulirati ovako:

Totalni tok (ili istjecanje) ili fluks vektora $\vec{v}$ kroz plohu S u smjeru vanjske normale **jednak** je izdašnosti izvora vektorskog polja $\vec{v}$ u volumenu V, **koji** je obuhvaćen **tom** plohom S.

Dosada smo govorili o divergenciji kao o mjeri izdašnosti izvora, koji se nalaze u području volumena V omeđenog zatvorenom plohom S, t. j. o

$$\iiint_V div\, \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iint v_n\, dS$$

Sada treba da shvatimo, što se razumije pod divergencijom vektora $\vec{v}$ u točki $T(x, y, z)$ područja. Jasno je, da mjera izdašnosti izvora, t. j. vrijednost $\iint_S v_n \, dS$ ovisi i o veličini područja, t. j. o njegovom volumenu V. Pravilna mjera izdašnosti bila bi vrijednost tog plošnog integrala podijeljena s volumenom V, t. j. relativna množina tekućine istekle iz područja u jednoj sekundi. Ako su izvori raspodjeljeni u području volumena V jednoliko, možemo za svaki element područja volumena ΔV odrediti pripadnu izdašnost.

Ako volumen V teži nuli tako, da se ploha S, koja ga omeđuje, steže u sve tri dimenzije na točku $T(x, y, z)$ područja, dobijemo vrijednost $div\,\vec{v}$ u toj točki T područja:

$$div\,\vec{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\iint_S v_n \, dS}{V}$$

Budući da je izdašnost izvora, odnosno množina istekle tekućine skalar, divergencija vektora je skalarna veličina, koja može biti u točki $T(x, y, z)$ područja pozitivna, negativna ili nula. Pozitivna vrijednost $div\,\vec{v}$ znači, da se u dotičnoj točki T područja nalazi izvor tekućine, negativna vrijednost kazuje, da je u točki T ponor tekućine, a $div\,\vec{v} = 0$ znači, da u dotičnoj točki nema ni izvora ni ponora.

Iz toga slijedi, da

$$\iint_S v_n \, dS$$

daje općenito razliku množine tekućine, koja kroz plohu S u područje utječe i množine tekućine, koja kroz to područje istječe.

Primijetimo još, da smo uzeli hidrodinamičku interpretaciju Gaussove formule, da na što jednostavniji način rastumačimo smisao Gaussove formule. Jasno je, da svi izvedeni odnosi vrijede općenito za bilo koje vektorsko polje.

Navedimo nekoliko primjera.

1. Odredi divergenciju vektorskog polja

$$\vec{v} = xyz\,\vec{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\,\vec{j} + (2x - 3y - 5z - 1)\,\vec{k}$$

u točki $T_0(2, 3, 4)$.

Računamo prema (202):

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = yz \quad , \quad \text{a u točki } T_0\text{:} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2y \quad , \text{ a u točki } T_0: \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -5 \quad , \text{ a u točki } T_0: \quad \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_0 = -5$$

$$(div\,\vec{v})_0 = 12 + 6 - 5 = \underline{13}$$

2. Izračunaj $div\,\vec{r}$, gdje je $\vec{r}$ radijvektor.

Kako je $\qquad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

imamo prema (202):

$$div\,\vec{r} = 1 + 1 + 1 = \underline{3}$$

Divergencija radijvektora $\vec{r}$ ista je u svim točkama polja i jednaka 3.

3. Tijelo rotira oko osi Z protiv kazaljke na satu s konstantnom kutnom brzinom ω. Odredi divergenciju vektora brzine $\vec{v}$ u točki $T\ (x, y, z)$ prostora u zadani moment.

Prema slici 185:

$$V = a\omega = r \sin\ \varphi \cdot \omega = \omega\, r \sin \varphi =$$

$$= \text{prema (20)} = |\vec{\omega} \times \vec{r}|.$$

Označivši s ω_x, ω_y i ω_z komponente vektora kutne brzine $\vec{\omega}$, dok su x, y i z komponente radijvektora $\vec{r}$, dobijemo prema (27 a):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_y z - \omega_z y)\,\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\,\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\,\vec{k}$$

Prema (202) dobijemo:

$$div\ \vec{v} = 0$$

4. Odredi totalni tok T vektora $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ kroz plohu omeđenu s $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$. Rezultat kontroliraj pomoću Gaussove formule.

Zadana ploha predočuje površinu S tijela omeđenog oktantom kugline plohe polumjera 1 i koordinatnim ravninama prvog oktanta. Nariši to!

Prema (203) i (196)

$$T = \iint_S v_n\, dS = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

imamo uzevši u obzir da je u našem slučaju

$$P = x^2, \quad Q = y^2 \quad i \quad R = z^2$$

$$T = \iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy \qquad (a)$$

Kako vidimo, zadatak se svodi na računanje plošnog integrala po zadanoj plohi S (vidi § 11).

Označivši s A, B i C točke, u kojim koordinatne osi X Y i Z probadaju sferu, prelazimo na računanje tog plošnog integrala.

$$T = \iint\limits_{AOB} + \iint\limits_{BOC} + \iint\limits_{AOC} + \iint\limits_{ABC}$$

$$\iint\limits_{AOB} = (z = 0, dz = 0, \cos\gamma = -1) = 0 \qquad \text{prema (a)}$$

$$\iint\limits_{BOC} = (x = 0, dx = 0, \cos\alpha = -1) = 0 \qquad \text{prema (a)}$$

$$\iint\limits_{AOC} = (y = 0, dy = 0, \cos\beta = -1) = 0 \qquad \text{prema (a)}$$

$$\iint\limits_{ABC} = ?$$

Pri računanju tog integrala uzimamo u obzir da normala na zadani oktant sfere zatvara s koordinatnim osima kutove, koji su manji od 90^0, i da treba projicirati taj dio sfere

na ravninu YZ uzevši $x^2 = 1 - y^2 - z^2$
na ravninu XZ uzevši $y^2 = 1 - x^2 - z^2$
na ravninu XY uzevši $z^2 = 1 - x^2 - y^2$

$$\iint\limits_{ABC} = \iint\limits_{BOC} (1 - y^2 - z^2)\, dy\, dz + \iint\limits_{AOC} (1 - x^2 - z^2)\, dx\, dz + \iint\limits_{AOB} (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Riješivši te integrale, prelazom na polarne koordinate dobijemo:

$$\iint\limits_{ABC} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$$

pa je

$$T = 0 + 0 + 0 + \frac{3}{8}\pi = \underline{\frac{3}{8}\pi}$$

Kontrola po Gaussu:

$$T = \iint\limits_{S} v_n\, dS = \iiint\limits_{V} div\, \vec{v}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{V} (2x + 2y + 2z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \text{uz prijelaz na sferne koordinate (119)} =$$

$$= 2 \iiint\limits_{V} (\varrho \sin\vartheta \cos\varphi + \varrho \sin\vartheta \sin\varphi + \varrho \cos\vartheta)\, \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, d\varrho =$$

$$= 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2\vartheta (\cos\varphi + \sin\varphi) + \sin\vartheta \cos\vartheta]\, d\vartheta \int\limits_0^1 \varrho^3\, d\varrho =$$

$$= \frac{2}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left| (\cos\varphi + \sin\varphi) \left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right) + \frac{\sin^2\vartheta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos\varphi + \sin\varphi)\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{\pi}{4}\cdot(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\frac{3}{8}\pi}$$

Izračunaj uz kontrolu totalni tok istog vektora $\vec{v}$ kroz plohe kocke prikazane na slici 174. Rezultat je 3.

Izračunaj totalni tok

a) vektora $\vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ kroz plohu omeđenu s $x + y + z = a; x = 0, y = 0, z = 0$.

[0]

b) vektora $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ kroz potpunu plohu valjka $x^2 + y^2 = a^2$; $0 \leq z \leq h$. Rezultate kontroliraj pomoću Gaussove formule.

[0]

c) vektora vanjske normale na plohu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

[4π]

4. Vektorski oblik Stokesove formule. Rotor vektorskog polja. Potencijalno polje sila. Određivanje potencijala

Da prikažemo Stokesovu formulu (194)

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS =$$

$$= \oint_K P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

u vektorskom obliku, definirajmo u onom dijelu prostora, u kojem su određene funkcije P, Q i R, vektorsko polje tako, da svakoj točki $T(x, y, z)$ toga dijela prostora dodijelimo vektor $\vec{v}$, kojemu su P, Q i R komponente u smjeru koordinatnih osi X, Y i Z, t. j.

$$\vec{v} \begin{cases} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{cases}$$

Tako na pr. nekoj točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ polja pripada vektor

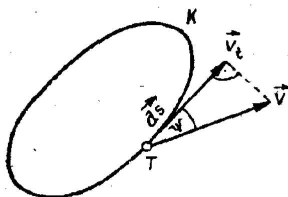
$$\vec{v}_1 = P(x_1, y_1, z_1)\vec{i} + Q(x_1, y_1, z_1)\vec{j} + R(x_1, y_1, z_1)\vec{k} \qquad \text{i t. d.}$$

Uvedimo još jedan vektor i to vektor pomaka $\vec{ds}$, koji ima smjer tangente na prostornu krivulju k i kojemu su komponente dx, dy i dz, t. j.

$$\vec{ds} \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases} \qquad \vec{ds} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

Tada predočuje integrand desne strane Stokesove formule skalarni produkt vektora $\vec{v}$ i $\vec{ds}$, pa imamo:

$$Pdx + Qdy + Rdz = \vec{v}\,\vec{ds} = v \cdot ds \cdot \cos\psi = \text{prema slici 187} = v_t ds,$$



Sl. 187

gdje je v_t tangentna komponenta vektora $\vec{v}$, t. j. projekcija vektora $\vec{v}$ u smjer tangente na krivulju k u nekoj točki $T(x, y, z)$ polja.

Desna strana Stokesove formule prima prema tome oblik:

$$\oint_K Pdx + Qdy + Rdz = \oint_K v_t\,ds \qquad \text{(a)}$$

U polju vektora $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ definirajmo novo vektorsko polje tako, da svakoj točki $T(x, y, z)$ polja vektora $\vec{v}$ dodijelimo još jedan vektor, kojemu su komponente u smjeru koordinatnih osi zadane izrazima navedenim u zagradama lijeve strane Stokesove formule. Taj vektor zove se **rotor** ili curl (kerl), t. j. vrtlog polja vektora $\vec{v}$, i označuje se s $rot\,\vec{v}$.

$$rot\,\vec{v} \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = (rot\,\vec{v})_x \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = (rot\,\vec{v})_y \\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = (rot\,\vec{v})_z \end{cases}$$

$$rot\,\vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (204)$$

Uvedemo li još jedinični vektor normale $n_0 \begin{cases} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{cases}$ na plohu S, koju omeđuje krivulja k, tada predočuje integrand lijeve strane Stokesove formule skalarni produkt vektora $rot\,\vec{v}$ i $\vec{n_0}$:

$\vec{rot\, v} \cdot \vec{n_0} = | \vec{rot\, v} | \cdot 1 \cdot \cos\varphi = (\mathrm{rot}\, \vec{v})_n =$ duljina normalne komponente vektora $\vec{rot\, v}$, t. j. projekcija $|\vec{rot\, v}|$ u smjer normale na plohu S.

Na taj način prima lijeva strana Stokesove formule vektorski oblik

$$\iint_S (rot\, \vec{v})_n dS \tag{b}$$

Iz (a) i (b) slijedi vektorski oblik Stokesove formule:

$$\iint_S (rot\, \vec{v})_n dS = \oint_K v_t ds \tag{205}$$

To znači: plošni integral normalne komponente rotora vektorskog polja $\vec{v}$ uzet po bilo kojoj plohi S, koju omeđuje krivulja k, jednak je krivuljnom integralu tangentne komponente vektora $\vec{v}$ polja protegnutom na tu zatvorenu krivulju k.

Uvedemo li opet hidrodinamičku interpretaciju vektorskog polja $\vec{v}$, t. j. smatramo li to vektorsko polje kao polje brzina stacionarnog strujanja neke nestlačive tekućine, tada predočuje u (205) krivuljni integral tangentne komponente v_t brzinu strujanja $\vec{v}$ duž zatvorene krivulje k, t. j.

$$\oint_K v_t ds$$

cirkulaciju ili kruženje tekućine duž zatvorene krivulje k, ili, kako se kaže, jakost vrtloga, a

$$\iint_S (rot\, \vec{v})_n dS$$

daje totalni tok ili fluks rotora brzine strujanja kroz plohu S u smjeru vanjske normale na tu plohu.

Stokesova formula kazuje sada:

Cirkulacija tekućine uzduž prostorne zatvorene krivulje k jednaka je toku rotora brzine strujanja kroz bilo koju plohu S, koju omeđuje ta krivulja k, i to u smjeru vanjske normale na tu plohu S.

Primijetimo, da je tok rotora $\vec{v}$ kroz plohu S posve određen zadanom krivuljom k, duž koje se računa cirkulacija vektora $\vec{v}$, pa je isti za sve plohe S, koje su omeđene tom krivuljom k.

Kako je ds element luka krivulje k, a v_t brzina strujanja tekućine u smjeru

tangente na tu krivulju k, cirkulacija ili jakost vrtloga $\oint_K v_t ds$ možemo također shvatiti kao množinu tekućine, koja protječe u jednoj sekundi po krivulji k.

Pod rotorom brzine strujanja tekućine u nekoj točki $T(x, y, z)$ polja brzina razumijemo graničnu vrijednost omjera cirkulacije tekućine duž zatvorene krivulje k i površine S plohe, koju ta krivulja omeđuje, kad se krivulja k, a dakle i ploha S stežu u obje dimenzije na tu točku T, t. j. u točki T polja

$$|rot\ \vec{v}| = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_K v_t ds}{S}$$

Uzmimo sada specijalni slučaj: pretpostavimo, da nema cirkulacije uzduž prostorne zatvorene krivulje k, t. j. neka je

$$\oint_K v_t ds = 0$$

Drugim riječima, pretpostavimo, da je strujanje bezvrtložno.

Tada prema (205) imamo:

$$rot\ \vec{v} = 0$$

a to znači, da vrijednost

$$\oint_K Pdx + Qdy + Rdz = \oint_K v_t ds$$

ne ovisi o putu integriranja, već jedino o početnoj i konačnoj točki toga puta, a integral duž svake zatvorene krivulje jednak je nuli.

Ako je $rot\ \vec{v} = 0$, tada su jednake nuli komponente vektora $rot\ \vec{v}$, t. j. prema (204)

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

a to su poznati nam uvjeti integrabilnosti (149) za linearni diferencijalni izraz $Pdx + Qdy + Rdz$. Taj izraz predočuje dakle u slučaju bezvrtložnog strujanja totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y, z)$, t. j.

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

a odatle je

$$P = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Kako znamo, P, Q i R su komponente brzine strujanja $\vec{v}$, a $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ i $\frac{\partial U}{\partial z}$ su komponente vektora *grad* U.

Prema tome:

ako je strujanje bezvrtložno, t. j. ako je $\oint_K v_t\, ds = 0$, tada je polje brzina strujanja $\vec{v}$ polje gradijenta $U(x, y, z)$, t. j. $\vec{v} = grad\ U$, funkcija $U(x, y, z)$ je dakle potencijal brzine strujanja, pa je

$$U(x, y, z) = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P dx + Q dy + R dz = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} v_t\, ds$$

gdje je $\vec{v} = grad\ U$

Možemo općenito kazati: svako bezvrtložno polje je potencijalno polje, t.j. polje gradijenta, i obratno: potencijalno polje nema vrtloga.

Vektorsko polje $\vec{v} = grad\ U$, kao i svako konzervativno polje, zove se i lamelarno, jer ga ekvipotencijalne plohe rastavljaju u slojeve poput lamela (pločica).

Prostorno polje vektora $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ interpretirali smo kao polje brzina strujanja neke nestlačive tekućine. Promotrimo još mehaničku interpretaciju Stokesove formule. U tu svrhu pretpostavimo, da je definirano vektorsko polje $\vec{v}$ polje sila $\vec{F}$, t. j. svakoj točki onog dijela prostora, u kojem su definirane neprekinute funkcije P, Q i R, dodijeljena je sila $\vec{F}$, kojoj su komponente

$$\vec{F} \begin{cases} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{cases}$$

Uvedemo li opet vektor pomaka ili puta po zatvorenoj prostornoj krivulji k

$$\vec{ds} \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$$

tada je

$$P dx + Q dy + R dz = \vec{F}\,\vec{ds} = F\, ds \cos\psi =$$

$=$ prema slici 187 $= F_t \cdot ds =$ radnja sile $\vec{F}$ na putu $ds = dA$, pa je

$A = \oint_K F_t\, ds$ — radnja, koju vrši materijalna točka pri gibanju u polju sila $\vec{F}$ duž zatvorene krivulje k.

Stokesova formula, koja sada prema (205) prima oblik

$$A = \oint_K Pdx + Qdy + Rdz = \oint_K \vec{F} d\vec{s} = \oint_K F_t ds = \iint_S (rot\, \vec{F})_n dS \tag{205a}$$

kazuje:

Radnja sile $\vec{F}$ izvršena od materijalne točke pri gibanju duž zatvorene krivulje k jednaka je toku rotora sile $\vec{F}$ kroz plohu S, koju omeđuje ta krivulja k, i to u smjeru vanjske normale na tu plohu S.

Ako je $\oint_K F_t ds = 0$, tada je i $rot \vec{F} = 0$, pa je polje sila $\vec{F}$ potencijalno, odnosno $\vec{F} = grad\ U$, a u tom slučaju radnja zavisi samo od početne i konačne točke puta, a ne zavisi od oblika staze, dok je radnja duž svake zatvorene krivulje u takvom polju sila jednaka nuli.

Prema tome radnja, što je vrši materijalna točka u potencijalnom polju pri gibanju duž bilo koje krivulje od točke C do točke D, jednaka je

$$A = U = \int_D^C dU = U_C - U_D$$

To znači:

U potencijalnom polju mehanički rad jednak je razlici potencijala u konačnoj i početnoj točki puta, ili: u potencijalnom polju rad se vrši na račun gubitka potencijala.

Ako je polje sila potencijalno, t. j. ako je $rot\, \vec{F} = 0$, tada su jednake nuli i komponente vektora $rot\, \vec{F}$, pa je prema (204)

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \tag{a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

a to je prema (149) nužni i dovoljni uvjet da je $Pdx + Qdy + Rdz$ totalni diferencijal neke funkcije $U(x, y, z)$, t. j.

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz \tag{b}$$

U tom je slučaju

$$U(x, y, z) = \int Pdx + Qdy + Rdz \tag{c}$$

potencijal polja sile $\vec{F}$, kojoj su komponente u svakoj točki $T(x, y, z)$ polja $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$.

Iz toga slijedi:

Polje sile $\vec{F}$ potječe od potencijala, t. j. od funkcije sila $U(x, y, z)$, ako komponente sile $\vec{F}$ zadovoljavaju jednadžbe (a), a potencijal U dobijemo prema (c), t. j. integrirajući jednadžbu (b):

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Gore navedeno ilustrirajmo već prije navedenim primjerom o Newtonovom polju gravitacije (vidi str. 389 i sl. 185).

Govoreći o potencijalu polja sile $\vec{F}$, kojom masa m privlači masu 1 u udaljenosti r, izveli smo za komponente sile $\vec{F}$ izraze:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{mx}{r^3} = P(x, y, z) \\ F_y &= -\frac{my}{r^3} = Q(x, y, z) \\ F_z &= -\frac{mz}{r^3} = R(x, y, z) \end{aligned} \qquad \text{(d)}$$

pa smo pokazali, da polje sila potječe od potencijala

$$U(x, y, z) = \frac{m}{r}$$

gdje je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Izvedimo sada taj izraz za potencijal Newtonova polja gravitacije.

Najprije moramo pokazati, da komponente sile privlačenja $\vec{F}$ zadovoljavaju jednadžbe (a), t. j. da je polje sila potencijalno.

Računajmo prema (a) i (d):

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = + \frac{3mz}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{3my}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{3mz}{r^4} \cdot \frac{y}{r} - \frac{3my}{r^4} \cdot \frac{z}{r} = 0$$

Na isti način dobijemo:

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

Newtonovo polje gravitacije potječe dakle od potencijala $U(x, y, z)$. Da ga odredimo, uvrstimo (d) u (b):

$$dU = -\frac{m}{r^3}(xdx + ydy + zdz)$$

Diferenciramo li

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

dobijemo:

$$2r\,dr = 2xdx + 2ydy + 2zdz\;/:2$$

$$r\,dr = xdx + ydy + zdz$$

pa imamo

$$dU = -\frac{m}{r^3}\cdot r\,dr = -\frac{m}{r^2}dr$$

Odatle:

$$U = -\int\frac{m}{r^2}dr + C$$

pa je

$$\underline{U = \frac{m}{r} + C}$$

Navedimo još jedan primjer za određivanje potencijala zadanog polja sila.

Pretpostavimo, da je žadano polje elastične sile $\vec{F}$, t. j. svakoj točki prostora dodjeljena je sila $\vec{F}$, koja je razmjerna udaljenosti te točke od ishodišta O koordinatnog sustava (potanko o elastičnoj sili već smo govorili u dijelu II. Repetitorija, § 10, 3. d) 1.).

Prema tome, bilo kojoj točki $T(x, y, z)$ prostora pripada elastična sila

$$\vec{F} = -c\,\vec{r}$$

gdje je c faktor razmjernosti, a r udaljenost te točke T od ishodišta O (vidi sl. 185).

Komponente sile $\vec{F}$ u smjeru koordinatnih osi bit će:

$$F_x = -cx; \qquad F_y = -cy \quad \text{i} \quad F_z = -cz,$$

gdje su x, y i z koordinate točke T, pa polje elastične sile glasi:

$$\vec{F} = -c\,(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Pokažimo najprije, da je zadano polje sila potencijalno, t. j. da komponente sile $\vec{F}$ zadovoljavaju jednadžbe (a), pri čemu uzmimo u obzir, da je u našem slučaju $P = F_x$, $Q = F_y$ i $R = F_z$.

Dobijemo:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

Sada prema (c) računajmo potencijal $U(x, y, z)$ zadanog polja sila:

$$U = \int (-c\,x\,dx - c\,y\,dy - c\,z\,dz) + C = -c \int x\,dx + y\,dy + z\,dz + C$$

Kako je

$$dr^2 = d(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$$

odnosno

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}\,dr^2$$

dobijemo

$$U = -\frac{c}{2}\int dr^2 + C = \underline{-\frac{cr^2}{2} + C}$$

To je potencijal zadanog polja elastične sile.

Znamo, da se Stokesova formula pretvara u Greenovu, ako uzmemo, da je ploha S i krivulja k ravna i da obje leže u ravnini XY, t. j. ako je $z = 0$. Stoga Greenova formula u vektorskom obliku glasi slično Stokesovoj:

$$\iint_\sigma rot\,\vec{v} \cdot d\sigma = \oint_K v_t\,ds$$

gdje je $rot\,\vec{v} = \frac{\partial Q}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j}$ rotor ravnog polja vektora $\vec{v} = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$. Sve što smo rekli o Stokesovoj formuli vrijedi i za Greenovu, jer su ove formule analogne.

Na kraju navedimo primjere.

1. **Odredi** $rot\,\vec{v}$ u točki $T_0(2, 3, 4)$ vektorskog polja

$$\vec{v} = xyz\,\vec{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\,\vec{j} + (2x - 3y - 5z - 1)\,\vec{k}$$

Računamo prema (204):

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=-3-2z \quad ; \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_0=-3-2\cdot 4=-11$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=xy-2 \quad ; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)_0=2\cdot 3-2=4$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-xz \quad ; \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0=2\cdot 2-2\cdot 4=-4$$

$$\underline{rot\,\vec{v}=-11\,\vec{i}+4\,\vec{j}-4\,\vec{k}}$$

2. Odredi cirkulaciju C vektora

$$\vec{v}=-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+c\,\vec{k},$$

gdje je c konstanta, uzduž kružnica:

a) $x^2+y^2=1, \quad z=0;$

b) $(x-2)^2+y^2=1; \quad z=0.$

Prema (205) i (194a)

$$C=\oint_{+K} v_t\,ds=\oint_{+K} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

imamo uzevši u obzir, da je u našem slučaju $P=-y$, $Q=x$ i $R=c$:

a) $C=\oint_{+K} -y\,dx+x\,dy+c\,dz=$ (uz prijelaz na parametarsku jednadžbu kružnice i $dz=0$) $=$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=\underline{2\pi}$$

b) Na isti način dobijemo:

$$C=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t+2\cos t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)\,dt=\Big|t+2\sin t\Big|_0^{2\pi}=\underline{2\pi}$$

Kontrola obaju rezultata pomoću Stokesove formule:

$$C=\iint_S (1+1)\,dx\,dy=2S=\underline{2\pi}$$

3. Izračunaj radnju sile $\vec{F}=\vec{r}$ uzduž odreska cilindričke spirale $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ct$ za $0\leq t\leq 2\pi$.

Prema (205a) radnja sile $\vec{F}$ uzduž krivulje k glasi:

$$A=\oint_{+K} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\oint_{+K}\vec{F}\,d\vec{s}$$

Kako je u našem slučaju sila $\vec{F} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, komponente te sile jesu

$$P = x, \quad Q = y \quad \text{i} \quad R = z$$

pa imamo:

$$A = \oint_{+K} x\,dx + y\,dy + z\,dz \qquad (a)$$

Iz jednadžbe spirale

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \\ z &= ct \end{aligned} \qquad \text{slijedi} \qquad \begin{aligned} dx &= -a\sin t\,dt \\ dy &= a\cos t\,dt \\ dz &= c\,dt \end{aligned}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$A = \int_0^{2\pi} (-a^2\cos t\sin t + a^2\sin t\cos t + c^2 t)\,dt =$$

$$= c^2\int_0^{2\pi} t\,dt = c^2 \left| \frac{t^2}{2} \right|_0^{2\pi} = \underline{2\pi^2 c^2}$$

4. Dokaži da je polje sila

$$\vec{F} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$$

potencijalno i odredi potencijal tog polja.

Budući da je potencijalno polje sila bezvrtložno, izračunajmo $rot\,\vec{F}$ prema **(204)**. Dobijemo

$$rot\,\vec{F} = 0$$

Polje sile $\vec{F}$ potječe dakle od potencijala $U(x, y, z)$. Odredimo ga prema **(150)**:

$$U = \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_{x_0}^{x} (2xyz + y^2 z + yz^2)\,dx + \int_{y_0}^{y} (x_0^2 z + 2x_0 yz + x_0 z^2)\,dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} (x_0^2 y_0 + x_0 y_0^2 + 2x_0 y_0 z)\,dz = \underline{xyz(x + y + z) + C}$$

pa je

$$\vec{F} = grad\,U$$

5. Izračunaj pomoću Stokesove formule (205) cirkulaciju $C = \oint_K v_t\,ds$ vektora

$$\vec{v} = -3y\vec{i} + 3x\vec{j} + \vec{k} \text{ uzduž kružnice } k \equiv x^2 + y^2 = 1;\ z = 2$$

[6π]

6. Izračunaj radnju sile $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ na putu od $T_1(1, 1, 2)$ do $T_2(3, 5, 0)$.

[-2]

7. Dokaži da je polje sila $\vec{F} = (e^x\cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x\sin y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$ potencijalno i odredi potencijal tog polja

$$\left[U = e^x\cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C \right]$$

5. Operatori ∇-nabla i Δ-delta i njihova primjena u vektorskim računima

Znamo, da gradijent skalarne funkcije $U(x, y, z)$ glasi

$$grad\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

Taj izraz možemo formalno napisati i ovako:

$$grad\ U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) U \tag{a}$$

Izraz u zagradama označio je Hamilton simbolom ∇, koji je dobio naziv nabla prema jednom feničkom muzičkom instrumentu na žice:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{206}$$

Kako je taj izraz posve sličan izrazima, kojim se prikazuju vektori, možemo ∇ smatrati kao neki formalni »vektor«, kojemu su »komponente« $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$. Taj »vektor« nema naravno nikakvog fizičkog značenja, a služi za pojednostavljenje i ubrzanje vektorskih operacija. On je dakle operator i to diferencijalni operator, jer traži diferenciranje izraza, koji iza njega slijedi.

Izraz za vektor *grad U* možemo formalno smatrati kao djelovanje operatora ∇ na skalarnu funkciju U:

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = grad\ U$$

$$\nabla U = grad\ U \tag{207}$$

t. j. nabla skalar daje gradijent tog skalara.

Pamtimo

$$\boxed{\nabla \text{ skalar} = grad \text{ skalara}} \tag{207a}$$

grad U znači dakle isto što i ∇U!

Kako je ∇ diferencijalni operator, možemo, znajući pravila deriviranja, lako napisati formule za operacije s operatorom ∇ (U i V su skalarne funkcije od x, y i z):

$$
\left.\begin{aligned}
&grad\,(U+V)=\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V=grad\,U+grad\,V\\
&grad\,(U\cdot V)=\nabla(U\cdot V)=U\nabla V+V\nabla U=U\,grad\,V+V\,grad\,U\\
&grad\,(kU)=\nabla kU=k\nabla U=k\,grad\,U,\ \text{gdje je } k \text{ konstanta}\\
&grad\,f(U)=\nabla f(U)=f'(U)\,\nabla U=f'(U)\,grad\,U
\end{aligned}\right\}\quad(208)
$$

Izvedimo, na primjer, drugu i četvrtu formulu sustava (208):

$$
grad\,(UV)=\nabla(UV)=\frac{\partial(UV)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial(UV)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial(UV)}{\partial z}\vec{k}=
$$

$$
=U\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+V\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+U\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+V\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+U\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}+V\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=
$$

$$
=U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)+V\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)=
$$

$$
=U\,grad\,V+V\,grad\,U=U\nabla V+V\nabla U
$$

$$
grad\,f(U)=\nabla f(U)=\frac{\partial f(U)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(U)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(U)}{\partial z}\vec{k}=
$$

= uzevši u obzir, da je $U=U(x,y,z)$, prema (88) imamo =

$$
=\frac{df}{dU}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{df}{dU}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{df}{dU}\,\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=
$$

$$
=\frac{df}{dU}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)=\frac{df}{dU}\cdot grad\,U=f'_U(U)\cdot\nabla U
$$

Izvedi na isti način ostale dvije formule sustava (208)!

Navedimo primjer za primjenu posljednje formule sustava (208):

Za apsolutnu vrijednost radijvektora

$$
r=|\vec{r}|=|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\qquad\text{(a)}
$$

odredi $grad\,\frac{1}{r}$, $grad\,r^2$ i $grad\,\frac{1}{r^3}$.

Najprije odredimo

$$
grad\,r=\nabla r=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)r=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=\text{prema(a)}=
$$

$$
=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i}+\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j}+\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}=
$$

$$
=\text{prema(a)}=\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{r}=\frac{\vec{r}}{r}=\vec{r}_0\qquad\text{(b)}
$$

Sada računamo:

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{d\frac{1}{r}}{dr} \cdot \nabla r = \text{prema (b)} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = -\frac{\vec{r}_0}{r^2} \quad \text{(c)}$$

$$\nabla r^2 = \frac{d(r^2)}{dr} \cdot \nabla r = 2r \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 2\vec{r} = 2r \cdot \vec{r}_0$$

$$\nabla \frac{1}{r^3} = \frac{d\left(\frac{1}{r^3}\right)}{dr} \cdot \nabla r = -\frac{3}{r^4} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{3}{r^5}\vec{r} \quad \text{(d)}$$

Izračunaj

a) *grad* $(k\sqrt{r})$, gdje je k konstanta

$$\left[\frac{k\vec{r}_0}{2\sqrt{r}}\right]$$

b) Gradijent skalarnog produkta konstantnog vektora $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ i radijvektora $\vec{r}$, tj. *grad* $(\vec{c}\,\vec{r})$

$[\vec{c}]$

Pomoću operatora ∇ možemo izraziti i divergenciju vektorskog polja $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Imali smo

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Taj izraz možemo formalno napisati i ovako

$$div\,\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R$$

pa ga smatrati kao zbroj istoimenih komponenata »vektora« $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \text{ i } \frac{\partial}{\partial z}\right)$ i vektora $\vec{v}(P, Q \text{ i } R)$, a kako je taj zbroj skalarni produkt dvaju vektora, imamo

$$div\,\vec{v} = \nabla\vec{v} \quad (209)$$

Skalarni produkt operatora nabla i vektora daje divergenciju toga vektora.

Pamtimo:

$$\boxed{\nabla \text{ vektor} = div \text{ vektora}} \quad (209a)$$

tj. nabla vektor daje divergenciju tog vektora.

$\nabla\vec{v}$ znači dakle isto što i *div* $\vec{v}$!

Prema tome, primijenjujući operator ∇ skalarno na vektore, dobijemo divergenciju, t. j. skalar, pa možemo kazati, da vektorskom polju odgovara skalarno polje divergencije.

Budući da je ∇ diferencijalni operator, imamo:

$$div\,(k\,\vec{v}) = \nabla\,(k\,\vec{v}) = k\,\nabla\,\vec{v} = k\,div\,\vec{v},$$

gdje je k skalarna konstanta.

$$\nabla\,(\vec{v} + \vec{t}) = \nabla\vec{v} + \nabla\vec{t} = div\,\vec{v} + div\,\vec{t}$$

i (210)

$$div\,(U\vec{v}) = \nabla\,(U\cdot\vec{v}) = U\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla U = U\,div\,\vec{v} + \vec{v}\,grad\,U$$

U formulama (210) $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ i $\vec{t} = t_x\vec{i} + t_y\vec{j} + t_z\vec{k}$ su dva vektorska polja, pa su v_x, v_y i v_z funkcije od x, y i z, isto vrijedi i za t_x, t_y i t_z dok je $U\,(x, y, z)$ skalarno polje.

Izvedimo treću formulu sustava (210), uzevši u obzir da $div\,(U\,\vec{v})$ možemo smatrati kao skalarni produkt ∇ i $U\,\vec{v}$:

$$\nabla(U\vec{v}) = \frac{\partial(Uv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Uv_y)}{\partial y} + \frac{\partial(Uv_z)}{\partial z} =$$

$$= U\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y\frac{\partial U}{\partial y} + U\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z\frac{\partial U}{\partial z} =$$

$$= U\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \left(v_x\frac{\partial U}{\partial x} + v_y\frac{\partial U}{\partial y} + v_z\frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

= druga zagrada predočuje skalarni produkt $\vec{v}$ i $grad\,U$ =

$$= U\,div\,\vec{v} + \vec{v}\,grad\,U = U\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla U.$$

Izvedi na isti način prve dvije formule sustava (210).

Navedimo dva primjera za primjenu treće formule sustava (210).

Za radijvektor $\vec{r}\,(x, y, z)$, odnosno $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$ izračunajmo:

a) $$div\,\vec{r}_0 = \nabla\vec{r}_0 = \nabla\frac{\vec{r}}{r} = \nabla\left(\frac{1}{r}\,\vec{r}\right) = \text{prema (210)} =$$

$$= \frac{1}{r}\nabla\vec{r} + \vec{r}\,\nabla\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\cdot 3 + \vec{r}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{3}{r} - \frac{\vec{r}^{\,2}}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r},$$

jer je (vidi str. 395) $\nabla\vec{r} = div\,\vec{r} = 3$ (a)

a prema (c) $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

b) $div \frac{\vec{r_0}}{r^2} = \nabla\left(\frac{1}{r^2}\cdot\vec{r_0}\right) = \nabla\left(\frac{1}{r^3}\vec{r}\right) =$ prema (210) $=$

$$= \frac{1}{r^3}\nabla\vec{r} + \vec{r}\,\nabla\frac{1}{r^3} = \text{prema (e) i (d)} = \frac{1}{r^3}\cdot 3 - \vec{r}\,\frac{3}{r^5}\vec{r} =$$

$$= \frac{3}{r^3} - r^2\cdot\frac{3}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = \underline{0}$$

c) $div\,(r^3\vec{r}) = \nabla\,(r^3\vec{r}) = prema$ (210) $= r^3\,div\,\vec{r} + \vec{r}\,grad\,r^3 =$ prema (e) i (208) $=$

$$= 3\,r^3 + \vec{r}\cdot 3\,r^2\;grad\;r = \text{prema (b)} = 3\,r^3 + \vec{r}\cdot 3\,r^2\cdot\vec{r_0} = 3\,r^3 + 3\,r^2\left(\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

$$= 3\,r^3 + 3\,r\cdot r^2 = \underline{6\,r^3}$$

d) $div\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla\left(\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}\right) =$ prema (210) $=$

$$= \frac{1}{r^3}\,\nabla\,\vec{r} + \vec{r}\,\nabla\,\frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} + \vec{r}\left(-\frac{3}{r^4}\right)\nabla\,r =$$

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\left(\vec{r}\,\vec{r_0}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\left(\vec{r}\,\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}\,r^2 = \underline{0}$$

Primijetimo da se vektorsko polje $\vec{v}$ zove solenoidalno, tj. cijevno, ako je $div\,\vec{v} = 0$ u svim točkama područja, u kojem je to polje $\vec{v}$ zadano.

Zadano je vektorsko polje $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ solenoidalno, jer je $div\,\vec{v} = 0$ i to u čitavom prostoru osim ishodišta 0. Točka 0 je jedini izvor. Da odredimo njegovu izdašnost, zaokružimo točku 0 kuglinom plohom S polumjera ϱ po volji. Budući da je u svim točkama te sfere $\vec{v} = \frac{\vec{\varrho}}{\varrho^3}$, za totalni tok T kroz sferu S dobijemo prema (203)

$$T = \iint_S v_n\,dS = \iint_S \frac{\varrho}{\varrho^3}\,dS = \frac{1}{\varrho^2}\cdot S = \frac{1}{\varrho^2}\cdot 4\,\varrho^2\pi = \underline{4\,\pi}$$

Izračunaj

a) $div\,\frac{\vec{r}}{r^4}$.

$$\left[-\frac{1}{r^4}\right]$$

b) $div\,[f(r)\,\vec{c}]$, gdje je $\vec{c}$ konstantan vektor.

$$\left[\frac{f'(r)}{r}\left(\vec{c}\,\vec{r}\right)\right]$$

c) $div\,[f(r)\,\vec{r}]$ i odredi, u kojem je slučaju divergencija jednaka nuli.

$$\left[3\,f(r) + r\,f'(r);\,f(r) = \frac{C}{r^3}\right]$$

Prije smo pokazali (vidi str. 395), da je divergencija radijvektora $\vec{r}$ konstantna i jednaka 3:

$$div\, \vec{r} = \nabla \vec{r} = 3 \tag{210a}$$

Promotrimo sada posebno divergenciju produkta konstantnog vektora $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ i skalarne funkcije $U(x, y, z)$, tj.

$$div\, (\vec{c}\, U) = \nabla\, (\vec{c}\, U)$$

Kako je

$$\vec{c}\, U = (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k})\, U = c_x U \vec{i} + c_y U \vec{j} + c_z U \vec{k}$$

dobijemo

$$div\, (\vec{c}\, U) = \nabla\, (\vec{c}\, U) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)\left(c_x U \vec{i} + c_y U \vec{j} + c_z U \vec{k} \right) =$$

$$= \frac{\partial (c_x U)}{\partial x} + \frac{\partial (c_y U)}{\partial y} + \frac{\partial (c_z U)}{\partial z} =$$

= uzevši u obzir, da su c_x, c_y i c_z konstante =

$$= c_x \frac{\partial U}{\partial x} + c_y \frac{\partial U}{\partial y} + c_z \frac{\partial U}{\partial z} =$$

= skalarni produkt konstantnog vektora $\vec{c}$ i $grad\, U = \vec{c}\, grad\, U = \vec{c}\, \nabla U$.

$$div\, (\vec{c}U) = \nabla\, (\vec{c}U) = \vec{c}\, grad\, U = \vec{c} \nabla U \tag{210b}$$

Iz te formule slijedi prvo važno pravilo za formalnu primjenu operatora ∇:

Ako se traži divergencija, odnosno ∇ produkta konstantnog vektora i skalarne funkcije, može se konstantni faktor iznijeti pred operator, pa operator djeluje samo na skalarnu funkciju i daje gradijent te funkcije.

Pomoću tog pravila možemo sada na vrlo jednostavan način izvesti treću formulu sustava (210).

Tražimo, dakle, izraz za

$$div\, (U\vec{v}) = \nabla\, (U\vec{v})$$

Pišemo formalno

$$\nabla\, (U\vec{v}) = \nabla\, (U\underline{\vec{v}}) + \nabla\, (\underline{U}\vec{v}) =$$

smatramo li, da su podvučeni faktori konstante i to da je $\underline{\vec{v}}$ konstantni vektor, a $\underline{U}$ skalarna konstanta, tada prema (210b) i prvoj formuli sustava (210), dobijemo

$$= \vec{v}\, \nabla U + U\, \nabla \vec{v} = \vec{v}\, grad\, U + U\, div\, \vec{v}$$

Konačno i $rot\, \vec{v}$ možemo izraziti pomoću nable.

Tvrdimo, da je $rot\, \vec{v}$ vektorski produkt »vektora« ∇ i vektora $\vec{v}$, t. j. da je

$$rot\ \vec{v} = \nabla \times \vec{v}.$$

U tu svrhu napišimo prema (27a) $\nabla \times \vec{v}$ u obliku determinante pa je razvijmo po elementima prvoga retka umetnuvši na prazna mjesta »komponenata« $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$ »vektora« ∇ pripadne komponente P, Q i R vektora $\vec{v}$.

Dobijemo:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \tag{211}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

a to je prema (204) izraz za $rot\ \vec{v}$.

Dakle:

$$rot\ \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \tag{211a}$$

Vektorski produkt operatora nabla i vektora daje rotor toga vektora.

Pamtimo:

$$\boxed{\nabla \times \text{vektor} = rot \text{ vektora}} \tag{211b}$$

$\nabla \times \vec{v}$ je dakle isto što i $rot\ \vec{v}$!

Na isti način dobijemo:

$$rot\,(k\vec{v}) = \nabla \times (k\vec{v}) = k\,(\nabla \times v) = k\ rot\ \vec{v} \tag{211c}$$

gdje je k skalarna konstanta. Izvedi to!

Izvedimo izraz za rotor produkta vektora

$$\vec{v} = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

i skalara

$$U(x, y, z).$$

Računamo prema (211) uzevši u obzir, da ulogu $\vec{v}$ igra sada $U\vec{v}$:

$$rot(U\vec{v}) = \nabla \times (U\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ UP & UQ & UR \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial(UR)}{\partial y} - \frac{\partial(UQ)}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial(UR)}{\partial x} - \frac{\partial(UP)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(UQ)}{\partial x} - \frac{\partial(UP)}{\partial y}\right) =$$

= sada po pravilu produkta računamo pojedine parcijalne derivacije =

$$= \vec{i}\left(U\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial U}{\partial z}\right) -$$

$$- \vec{j}\left(U\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial U}{\partial z}\right) +$$

$$+ \vec{k}\left(U\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial U}{\partial y}\right) =$$

$$= U\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\right\} +$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial y}R - \frac{\partial U}{\partial z}Q\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}P - \frac{\partial U}{\partial x}R\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}Q - \frac{\partial U}{\partial y}P\right)\vec{k}\right\}$$

U prvim vitičastim zagradama nalazi se prema (204) $rot\,\vec{v}$, a u drugim je prema (199) i (27) vektorski produkt vektora *grad U* i $\vec{v}$.

Imamo dakle:

$$rot(U\vec{v}) = \nabla \times (U\vec{v}) = U\,rot\,\vec{v} + grad\,U \times \vec{v}$$

ili (212)

$$rot(U\vec{v}) = U\,rot\,\vec{v} - \vec{v} \times grad\,U$$

ili u drugom obliku

$$\nabla \times (U\vec{v}) = U(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \times \nabla U \qquad (212a)$$

Postupajući na isti način, dobijemo izraz za rotor zbroja dvaju vektora:

$$rot(\vec{v} + \vec{t}) = rot\,\vec{v} + rot\,\vec{t}$$

ili (213)

$$\nabla \times (\vec{v} + \vec{t}) = \nabla \times \vec{v} + \nabla \times \vec{t}$$

Izvedi to!

Izračunajmo još $rot\,\vec{r}$, t. j. rotor polja radijvektora $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$rot\,\vec{r} = \nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

Svaka parcijalna derivacija jednaka je nuli, jer su x, y i z nezavisne promjenljive.

Prema tome je

$$rot\,\vec{r} = 0 \tag{213a}$$

Rotor radijvektora jednak je nuli, t. j. polje radijvektora je bezvrtložno.

Izvedimo sada izraz za rotor produkta konstantnog vektora $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ i skalarne funkcije $U(x, y, z)$, tj. za

$$rot\,(\vec{c}U) = \nabla \times (\vec{c}U) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_x U & c_y U & c_z U \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial (c_z U)}{\partial y} - \frac{\partial (c_y U)}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial (c_x U)}{\partial z} - \frac{\partial (c_z U)}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial (c_y U)}{\partial x} - \frac{\partial (c_x U)}{\partial y}\right) =$$

uzevši u obzir, da su c_x, c_y i c_z konstante =

$$= \left(c_z\frac{\partial U}{\partial y} - c_y\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(c_x\frac{\partial U}{\partial z} - c_z\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(c_y\frac{\partial U}{\partial x} - c_x\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= -\vec{c} \times \nabla U = -\vec{c} \times grad\,U$$

jer

$$-\vec{c} \times grad\,U = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_x & c_y & c_z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix}$$

daje gore dobiveni izraz. Da se u to uvjeriš, **razvij tu determinantu!**

Imamo dakle

$$rot\,(\vec{c}U) = \nabla \times (\vec{c}U) = -\vec{c} \times \nabla U = -\vec{c} \times grad\,U \tag{213b}$$

Ta formula daje drugo važno pravilo za formalnu primjenu operatora ∇:

A k o s e t r a ž i r o t o r, o d n o s n o $\nabla \times$ p r o d u k t a k o n s t a n t n o g v e k t o r a i s k a l a r n e f u n k c i j e, m o ž e s e k o n s t a n t n i v e k t o r i z n i j e t i p r e d o p e r a t o r, p a o p e r a t o r ∇ d j e l u j e s a m o n a s k a l a r n u f u n k c i j u i d a j e g r a d i j e n t t e f u n k c i j e, a l i u d o b i v e n o m i z r a z u t r e b a p r o m i j e n i t i p r e d z n a k, j e r z n a m o, d a z a v e k t o r s k i p r o d u k t n e v r i j e d i z a k o n k o m u t a c i j e.

Sada možemo vrlo jednostavno izvesti formulu (212) napisavši formalno $rot\,(U\vec{v})$ u obliku:

$$rot\,(U\vec{v}) = \nabla \times (U\vec{v}) = \nabla \times (\underline{U}\vec{v}) + \nabla \times (U\underline{\vec{v}}) =$$

smatramo li, da su podvučeni faktori konstante i to, da je $\underline{U}$ skalarna konstanta, a $\underline{\vec{v}}$ konstantni vektor, tada prema (211c) i (213b) dobijemo =

$$= U\,(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \times \nabla U = U\,rot\,\vec{v} - \vec{v} \times grad\,U \qquad (212)$$

Primjeri.

1. $$rot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \text{prema (212)} = \frac{1}{r^3}\,rot\,\vec{r} - \vec{r} \times grad\,\frac{1}{r^3} =$$

$$= \text{prema (213a) i (d) na str. 410} = 0 + \vec{r} \times \frac{3}{r^5}\,\vec{r} = \frac{3}{r^5}\,(\vec{r} \times \vec{r}) = \underline{0}$$

jer je vektorski kvadrat jednak nuli prema (24).

2. $$rot\,[f(r)\,\vec{r}] = \nabla \times [f(r)\,\vec{r}] = \text{prema (212)} = f(r)\,rot\,\vec{r} - \vec{r} \times grad\,f(r) =$$

$$= \text{prema (213a) i (208)} = 0 - \vec{r} \times f'(r)\,\nabla r = -\vec{r} \times f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r} =$$

$$= -\frac{f'(r)}{r}\,(\vec{r} \times \vec{r}) = \underline{0}$$

jer je prema (b) $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$, a vektorski kvadrat jednak nuli.

3. $$rot\,[\vec{c}\,f(r)] = \nabla \times [\vec{c}\,f(r)] = \text{prema (213b)} = -\vec{c} \times \nabla f(r) = \text{prema (208)} =$$

$$= -\vec{c} \times f'(r)\,\nabla r =$$

$$= \text{prema (b)} = -\vec{c} \times f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r} = \underline{\frac{f'(r)}{r}\,(\vec{r} \times \vec{c})}$$

Naš je zadatak da izračunamo nekoliko kompliciranih vektorskih izraza i to

$$\nabla\,(\vec{v}\,\vec{t}),\ \nabla\,(\vec{v} \times \vec{t}) \text{ i } \nabla \times (\vec{v} \times \vec{t}),$$

ali prije moramo kazati nekoliko riječi o d e r i v a c i j i **v e k t o r s k e f u n k c i j e** ili, kraće, vektora

$$\vec{v} = v_x(x, y, z)\,\vec{i} + v_y(x, y, z)\,\vec{j} + v_z(x, y, z)\,\vec{k}$$

u nekom zadanom smjeru $s(\alpha, \beta, \gamma)$, kojemu odgovara ort

$$\vec{s}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$

i to u nekoj točki $A(x, y, z)$ tog vektorskog polja $\vec{v}(x, y, z)$.

U smjeru s uzmimo točku B udaljenu od točke A za Δs i neka točki A odgovara vrijednost radijvektora $\vec{v}(\vec{r}_A)$, a točki B — vrijednost $\vec{v}(\vec{r}_B)$, pa derivaciju funkcije $\vec{v}$ u smjeru s definiramo slično kao za skalarnu funkciju:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{v}(\vec{r}_B) - \vec{v}(\vec{r}_A)}{\Delta s}$$

Kako su radijvektori funkcije od x, y, z, prema (87) dobijemo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}$$

Znamo, da je prema slici 181 i (197)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta \quad \text{i} \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

pa konačno imamo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\cos\gamma \qquad (213c)$$

Kako su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ komponente orta $\vec{s}_0$, u kojem smo smjeru derivirali vektorsku funkciju $\vec{v}$, tu usmjerenu derivaciju vektora $\vec{v}$ pišemo u obliku:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{s}_0} \qquad (213c)$$

ili prema (198a):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0(\nabla\,\vec{v}) =$$

$$= (\vec{s}_0\,\nabla\,v_x)\,\vec{i} + (\vec{s}_0\,\nabla\,v_y)\,\vec{j} + (\vec{s}_0\,\nabla\,v_z)\,\vec{k} = \qquad (213c)'$$

$$= (\vec{s}_0\,grad\,v_x)\,\vec{i} + (\vec{s}_0\,grad\,v_y)\,\vec{j} + (\vec{s}_0\,grad\,v_z)\,\vec{k}$$

dok usmjerenu derivaciju skalarne funkcije $U = U(x, y, z)$ računamo prema (198a):

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0\,\nabla\,U = \vec{s}_0\,grad\,U.$$

Primjer

Izračunaj derivaciju $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ u smjeru $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ u točki $T_1\,(1,\ 1,\ 1)$.

$$\text{Kako je } \vec{s}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\nabla\, v_x = grad\,(yz) = z\vec{j} + y\vec{k}$$

$$\nabla\, v_y = grad\,(xz) = z\vec{i} + x\vec{k}$$

$$\nabla\, v_z = grad\,(xy) = y\vec{i} + x\vec{j}$$

prema (213)′ dobijemo u točki $T\,(x,\ y,\ z)$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \vec{s}_0\, \nabla\, \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\{[(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\,(z\vec{j} + y\vec{k})]\,\vec{i} +$$

$$+ [(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\,(z\vec{i} + x\vec{k})]\,\vec{j} + [(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\,(y\vec{i} + x\vec{j})]\,\vec{k}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,[(z + y)\,\vec{i} + (z + x)\,\vec{j} + (y + x)\,\vec{k}]$$

a u točki $T_1\,(1,\ 1,\ 1)$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = 2\,\frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{2\,\vec{s}_0}}$$

Izračunaj derivaciju radijvektora $\vec{r}$ u smjeru $s\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$.

$[\vec{s}_0]$

Primjere za usmjerene derivacije vektorskih i skalarnih funkcija vidi dalje na strani 424.

Navedimo još formule za derivacije po parametru t vektorskog i skalarnog produkta vektorskih funkcija

$$\vec{a}\,(t) = a_x\,(t)\,\vec{i} + a_y\,(t)\,\vec{j} + a_z\,(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{b}\,(t) = b_x\,(t)\,\vec{i} + b_y\,(t)\,\vec{j} + b_z\,(t)\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}} \qquad (213c)''$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a}\,\dot{\vec{b}} + \vec{b}\,\dot{\vec{a}} \qquad (213c)'''$$

($\dot{\vec{a}}$ i $\dot{\vec{b}}$ su derivacije tih vektora po t)

Izračunaj za vektore

$$\vec{a}\,(t) = 3\,t\,\vec{i} + 2t^2\vec{j} + t^3\,\vec{k}$$

$$\vec{b}\,(t) = -\,t\,\vec{i} - 3\,t\,\vec{j} + \frac{1}{t}\,\vec{k}$$

derivacije vektorskog i skalarnog produkta prema gore navedenim formulama. Rezultate kontroliraj tako, da izračunavši vektorski, odnosno skalarni produkt vektorâ deriviraj dobivene izraze po t.

Sada prelazimo na računanje gore navedenih vektorskih izraza.

1\. Traži se izraz za gradijent skalarnog produkta dviju vektorskih funkcija, odnosno vektorskih polja:

$$\vec{v} = v_x\,(x, y, z)\,\vec{i} + v_y\,(x, y, z)\,\vec{j} + v_z\,(x, y, z)\,\vec{k}$$

$$\vec{t} = t_x(x, y, z)\vec{i} + t_y(x, y, z)\vec{j} + t_z(x, y, z)\vec{k}$$

tj. za

$$grad(\vec{v}\,\vec{t}) = \nabla(\vec{v}\,\vec{t})$$

Mogli bismo taj problem riješiti tako, da najprije izračunamo skalarni produkt $\vec{v}$ i $\vec{t}$ pa zatim gradijent tog produkta. Taj način je vrlo kompliciran, pa ćemo mnogo jednostavnije doći do traženog rezultata formalnom primjenom trostrukog vektorskog produkta. Prema (32)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$$

možemo pisati:

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{t}) = \nabla(\vec{v}\,\vec{t}) - \vec{t}(\vec{v}\nabla)$$

odatle

$$\nabla(\vec{v}\,\vec{t}) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{t}) + \vec{t}(\vec{v}\,\nabla) \qquad \text{(a)}$$

Analogno

$$\vec{t} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\vec{t}\,\vec{v}) - \vec{v}(\vec{t}\,\nabla)$$

odatle

$$\nabla(\vec{t}\,\vec{v}) = \vec{t} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v}(\vec{t}\,\nabla) \qquad \text{(b)}$$

Sada prikažimo $\nabla(\vec{v}\,\vec{t})$ formalno u obliku

$$\nabla(\vec{v}\,\vec{t}) = \nabla(\underline{\vec{v}}\,\vec{t}) + \nabla(\vec{v}\,\underline{\vec{t}})$$

tj. smatramo, da su $\underline{\vec{v}}$ i $\underline{\vec{t}}$ konstantni vektori, pa u taj izraz uvrstimo (a) i (b), uzevši u obzir, da je $\nabla(\vec{v}\,\vec{t}) = \nabla(\vec{t}\,\vec{v})$.

Dobijemo:

$$\nabla(\vec{v}\,\vec{t}) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{t}) + \vec{t}(\vec{v}\,\nabla) + \vec{t} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v}(\vec{t}\,\nabla)$$

ili

$$grad(\vec{v}\,\vec{t}) = \nabla(\vec{v}\,\vec{t}) = \vec{v} \times rot\,\vec{t} + \vec{t} \times rot\,\vec{v} + (\vec{v}\,\nabla)\vec{t} + (\vec{t}\,\nabla)\vec{v}$$

Pokažimo, što znače posljednja dva člana izvedene formule:

$$(\vec{v}\,\nabla)\vec{t} = v\left(\frac{\vec{v}}{v}\,\nabla\right)\vec{t} = v(\vec{v}_0\,\nabla)\vec{t} =$$

[u zagradama je skalarni produkt orta $\vec{v}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ i operatora $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$]

$$= v\left(\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{t} =$$

$$= v\left(\cos\alpha\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial z}\right) = \text{prema (213c)} = v\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial\vec{v}_0}$$

Prema tome

$$(\vec{v}\nabla)\vec{t} = v\frac{\partial \vec{t}}{\partial \vec{v}_0} \tag{213d}$$

Simbolički izraz $(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{t}$ predočuje dakle produkt apsolutne vrijednosti vektora $\vec{v}$ i derivacije vektora $\vec{t}$ u smjeru vektora $\vec{v}$. Na isti način imamo

$$(\vec{t}\,\nabla)\,\vec{v} = t\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{t}_0}$$

Sada i formulu (198a) za usmjerenu derivaciju skalarne funkcije $U\,(x, y, z)$ možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0\ grad\ U = (\vec{s}_0\nabla)\ U$$

pa je

$$(\vec{s}\,\nabla\,)\,U = s\,(\ \vec{s}_0\nabla\,)\,U = s\,\frac{\partial U}{\partial \vec{s}_0} = s\,(\vec{s}_0\,grad\ U) = \vec{s}\ grad\ U$$

ili

$$(\vec{s}\,\nabla\,)\,U = \vec{s}\,\nabla\,U \tag{213d)'}$$

Naša formula glasi konačno:

$$\begin{aligned} grad\,(\vec{v}\,\vec{t}) &= \nabla\,(\vec{v}\,\vec{t}) = \\ &= \vec{v}\times(\nabla\times\vec{t}) + \vec{t}\times(\nabla\times\vec{v}) + (\vec{v}\nabla)\,\vec{t} + (\vec{t}\,\nabla)\,\vec{v} = \\ &= \vec{v}\times rot\,\vec{t} + \vec{t}\times rot\,\vec{v} + v\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial\vec{v}_0} + t\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{t}_0} \end{aligned} \tag{213e}$$

2. Izvedimo sada divergenciju vektorskog produkta dvaju vektora, tj.

$$div\,(\vec{v}\times\vec{t}) = \nabla\,(\vec{v}\times\vec{t})$$

Izračunavši prema (27a) vektor, koji predočuje vektorski produkt vektora $\vec{v}$ i $\vec{t}$ i uzevši u obzir, da je divergencija vektora skalarni produkt operatora ∇ i tog vektora, dobijemo prema (211):

$$\begin{aligned} div\,(\vec{v}\times\vec{t}) &= \nabla(\vec{v}\times\vec{t}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(v_y\,t_z - v_z\,t_y) + \frac{\partial}{\partial y}(v_z\,t_x - v_x\,t_z) + \frac{\partial}{\partial z}(v_x\,t_y - v_y\,t_x) = \\ &= v_y\frac{\partial t_z}{\partial x} + t_z\frac{\partial v_y}{\partial x} - v_z\frac{\partial t_y}{\partial x} - t_y\frac{\partial v_z}{\partial x} + \\ &+ v_z\frac{\partial t_x}{\partial y} + t_x\frac{\partial v_z}{\partial y} - v_x\frac{\partial t_z}{\partial y} - t_z\frac{\partial v_x}{\partial y} + \end{aligned}$$

$$+ v_x \frac{\partial t_y}{\partial z} + t_y \frac{\partial v_x}{\partial z} - v_y \frac{\partial t_x}{\partial z} - t_x \frac{\partial v_y}{\partial z} =$$

$$= v_x \left(\frac{\partial t_y}{\partial z} - \frac{\partial t_z}{\partial y}\right) + v_y \left(\frac{\partial t_z}{\partial x} - \frac{\partial t_x}{\partial z}\right) + v_z \left(\frac{\partial t_x}{\partial y} - \frac{\partial t_y}{\partial x}\right) +$$

$$+ t_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + t_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + t_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Prva tri člana predočuju skalarni produkt vektora $\vec{v}$ i $rot\ \vec{t}$, a druga tri skalarni produkt vektora $\vec{t}$ i $rot\ \vec{v}$, pri čemu je prvi produkt negativan.

(Da se u to uvjeriš razvij prema (211) $rot\ \vec{t}$ i $rot\ \vec{v}$).

Konačno dobijemo:

$$div\ (\vec{v} \times \vec{t}) = -\vec{v}\ rot\ \vec{t} + \vec{t}\ rot\ \vec{v}$$

ili

$$div\ (\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla\ (\vec{v} \times \vec{t}) = \vec{t}\ (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v}\ (\nabla \times \vec{t}) = \vec{t}\ rot\ \vec{v} - \vec{v}\ rot\ \vec{t} \qquad (213f)$$

Mnogo jednostavnije dolazimo do istog rezultata formalnom primjenom operatora ∇.

Kao prije napišimo $\nabla\ (\vec{v} \times \vec{t})$ u formalnom obliku podvukavši one vektore, koje ćemo smatrati kao da su konstantni:

$$\nabla\ (\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla\ (\underline{\vec{v}} \times \vec{t}) + \nabla\ (\vec{v} \times \underline{\vec{t}}) =$$

sada mijenjamo položaj vektora u prvim zagradama, jer operator mora biti lijevo od vektora, na koji djeluje, tj. lijevo od $\vec{t}$, jer $\underline{\vec{v}}$ smatramo kao da je konstantan

$$= -\nabla\ (\vec{t} \times \underline{\vec{v}}) + \nabla\ (\vec{v} \times \underline{\vec{t}}) =$$

konačno konstantne vektore stavimo ispred operatora ∇, jer ∇ djeluje na vektore, koji nisu konstantni

$$= -\vec{v}\ (\nabla \times \vec{t}) + \vec{t}\ (\nabla \times \vec{v}) =$$

$$= \vec{t}\ rot\ \vec{v} - \vec{v}\ rot\ \vec{t}$$

Poseban slučaj

Neka je $\vec{v} = \vec{c}$ = konstantan vektor.

Prema (213f) dobijemo

$$div\ (\vec{c} \times \vec{t}) = \vec{t}\ rot\ \vec{c} - \vec{c}\ rot\ \vec{t} = -\vec{c}\ rot\ \vec{t}$$

jer je $rot\ \vec{c} = 0$.

Npr. $div\ (\vec{c} \times \vec{r}) = -\vec{c}\ rot\ \vec{r} = 0$, jer je prema (213a) $rot\ \vec{r} = 0$.

3. Izračunajmo sada rotor vektorskog produkta dvaju vektora, tj.

$$rot\,(\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{t})$$

Izračunavši prema (27a) vektorski produkt vektora $\vec{v}$ i $\vec{t}$ prema (211) imamo:

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{t}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_y t_z - v_z t_y & v_z t_x - v_x t_z & v_x t_y - v_y t_x \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(v_x t_y - v_y t_x) - \frac{\partial}{\partial z}(v_z t_x - v_x t_z)\right]\vec{i} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}(v_y t_z - v_z t_y) - \frac{\partial}{\partial x}(v_x t_y - v_y t_x)\right]\vec{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(v_z t_x - v_x t_z) - \frac{\partial}{\partial y}(v_y t_z - v_z t_y)\right]\vec{k}$$

Izračunavši parcijalne derivacije i uredivši dobijemo konačno:

$$rot\,(\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{t}) = \vec{v}\,div\,\vec{t} - \vec{t}\,div\,\vec{v} + (\vec{t}\,\nabla)\,\vec{v} - (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{t}$$

Mnogo brže dolazimo do tog rezultata formalnom primjenom operatora ∇:

$$rot\,(\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla \times (\underline{\vec{v}} \times \vec{t}) + \nabla \times (\vec{v} \times \underline{\vec{t}}) =$$

$$= \text{prema (32)}\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}) =$$

$$= \underline{\vec{v}}\,(\nabla\,\vec{t}) - \vec{t}\,(\nabla\,\underline{\vec{v}}) + \vec{v}\,(\nabla\,\underline{\vec{t}}) - \underline{\vec{t}}\,(\nabla\,\vec{v}) =$$

uzevši u obzir, da operator ∇ ne djeluje na vektore, koje smatramo da su konstantni, u izrazima $(\nabla \underline{\vec{v}})$ i $(\nabla \underline{\vec{t}})$ stavimo $\underline{\vec{v}}$ i $\underline{\vec{t}}$ ispred ∇ =

$$= \vec{v}\,(\nabla\,\vec{t}) - \vec{t}\,(\vec{v}\,\nabla) + \vec{v}\,(\vec{t}\,\nabla) - \vec{t}\,(\nabla\,\vec{v})$$

Prema (213d) dobijemo konačno:

$$rot\,(\vec{v} \times \vec{t}) = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{t}) = \vec{v}\,(\nabla\,\vec{t}) - \vec{t}\,(\nabla\,\vec{v}) + (\vec{t}\,\nabla)\,\vec{v} - (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{t} =$$

$$= \vec{v}\,div\,\vec{t} - \vec{t}\,div\,\vec{v} + t\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{t}_0} - v\,\frac{\partial \vec{t}}{\partial \vec{v}_0} \qquad (213g)$$

Poseban slučaj

Neka je $\vec{v} = \vec{c}$ = konstantan vektor.

Prema (213g) dobijemo

$$rot(\vec{c}\times\vec{t}) = \vec{c}\,div\,\vec{t} - \vec{t}\,div\,\vec{c} + \vec{t}\,\frac{\partial\vec{c}}{\partial\vec{t}_0} - \vec{c}\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial\vec{c}_0} = \vec{c}\,div\,\vec{t} - c\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial\vec{c}_0}$$

jer su $div\,\vec{c} = 0$ i $\frac{\partial\vec{c}}{\partial\vec{t}_0} = 0$.

Primjeri

1. Izračunaj u točki $T(x, y, z)$ derivaciju skalarnog polja $U = \frac{1}{r}$ u smjeru $\vec{s}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Prema (213d)':

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\vec{s}_0} = (\vec{s}_0\nabla)\,\frac{1}{r} = \vec{s}_0\,grad\,\frac{1}{r} = \text{prema (c) na str. 410.}$$

$$= -\vec{s}_0\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{r}_0 = -\frac{1}{r^2}(\vec{s}_0\,\vec{r}_0) = -\frac{1}{r^2}\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\varphi =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\cos\varphi$$

gdje je φ kut između $\vec{s}_0$ i $\vec{r}_0$.

2. Izračunaj u tački T_1 (2, 2, 1) derivaciju divergencije vektorskog polja $\vec{v} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (z^2 - x^2)\vec{j} + 3(x - z^2)\vec{k}$ u smjeru jediničnog vektora normale $\vec{n}_0$ na sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Prema (213d)':

$$\frac{\partial\,div\,\vec{v}}{\partial\vec{n}_0} = (\vec{n}_0\nabla)\,div\,\vec{v} = \vec{n}_0\cdot grad\,div\,\vec{v}$$

Za sferu $\vec{n} \equiv \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, a u tački T_1

$$\vec{r} \equiv \vec{n} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \text{pa je}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{n} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

dok je prema (202): $div\,\vec{v} = \nabla\vec{v} = 2x - 6z$, a

$$grad\,(2x - 6z) = 2\vec{i} - 6\vec{k}$$

$$\frac{\partial\,div\,\vec{v}}{\partial\vec{n}_0} = \left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}\right)\left(2\vec{i} - 6\vec{k}\right) = \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 6 = -\frac{2}{3}$$

3. Izračunaj

$$(\vec{v}\nabla)\,\vec{t} = v\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial\vec{v}_0}, \text{ ako je}$$

$$\vec{v} = x\vec{i} - y\vec{j}, \quad \vec{t} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

Prema (213c)':

$$(\vec{v}\,\nabla\,\vec{t}) = [(x\vec{i} - y\vec{j})\,2\,x\vec{i}]\,\vec{i} + [-(x\vec{i} - y\vec{j})\,2\,y\vec{j}]\,\vec{j} +$$

$$+ [(x\vec{i} - y\vec{j})\,2\,z\vec{k}]\,\vec{k} = \underline{2\,x^2\,\vec{i} + 2\,y^2\,\vec{j}}$$

4 $[(\vec{i} - \vec{j})\,\nabla\,](xy - yz + xz)$ = *prema* (213d)' =

$$= (\vec{i} - \vec{j})\,grad\,(xy - yz + xz) = (\vec{i} - \vec{j})\,[(y + z)\,\vec{i} +$$

$$+ (x - z)\,\vec{j} + (-y + x)\,\vec{k}] = y + z - x + z = \underline{y - x + 2\,z}$$

5 Izračunaj u točki $T\,(x,\,y,\,z)$ derivaciju skalarnog polja $U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ u smjeru $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ te točke

[2 U]

6 Izračunaj divergenciju vektorskog produkta vektorâ $\vec{v} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ i $\vec{t} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, tj. $\nabla\,(\vec{v} \times \vec{t})$ u točki $A\,(2,\,-3,\,5)$ polja

[8]

Izvršimo sada nekoliko kompliciranih vektorskih operacija, koje se svode na višestruku primjenu operatora nabla. To su t. zv. diferencijalne operacije drugog reda

1. Izračunajmo divergenciju polja gradijenta skalarne funkcije $U(x,\,y,\,z)$, tj. *div grad U*·

div grad U = ∇ *grad U* = skalarni produkt formalnog »vektora«

$$\nabla \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right. \quad \text{i vektora } grad\ U \quad \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{matrix} \right. \tag{214}$$

$$= \text{prema (18)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Napišemo li formalno izraz dobiven za *div grad U* u obliku:

$$div\ grad\ U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U$$

tada predočuje izraz u zagradama Laplace-ov operator ili laplasijan, koji se označuje s Δ (delta)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{215}$$

pa imamo:

$$div\ grad\ U = \nabla\ grad\ U = \Delta U \tag{214a}$$

Kako znamo, $\Delta U = 0$ je Laplace-ova diferencijalna jednadžba (vidi str. 152). Sada možemo stvoriti vezu između operatora Hamiltonova ∇ i Laplaceova Δ. Znamo prema (207), da je

$$grad\ U = \nabla U$$

dakle

$$div\ grad\ U = \nabla\ grad\ U = \nabla\nabla U = \Delta U$$

a odatle je

$$\boxed{\nabla\nabla = \nabla^2 = \Delta = div\ grad} \tag{216}$$

Skalarni kvadrat operatora ∇ daje operator Δ!

Pazi! Formula (216) ne smije se primijeniti na $grad\ div\ \vec{v} = \nabla(\nabla \vec{v})$, t. j. $\nabla(\nabla \vec{v}) \neq \Delta \vec{v}$. Vidi dalje točku 4.

Da se uvjeriš u ispravnost formule (216), izračunaj formalno

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)^2$$

uzevši u obzir jednakosti (13) i (16).

Dobit ćeš:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

Ali vektorski kvadrat nable jednak je nuli

$$\boxed{\nabla \times \nabla = 0} \tag{217}$$

jer je prema (24) vektorski kvadrat vektora jednak nuli.

Iz gornjeg se vidi, da je:

$$\Delta U = \Delta \text{ skalar} = \text{skalar} = div\ grad\ U$$

Pogledajmo, što će dati $\Delta \vec{v} = \Delta$ vektor $=$ *div grad* vektor.

$$div\ grad\ \vec{v} = \Delta \vec{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) + \tag{218}$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)=\vec{i}\,\Delta P+\vec{j}\,\Delta Q+\vec{k}\,\Delta R=\text{vektor}$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta\ \text{vektor} = \text{vektor} = div\ grad\ \vec{v}$$

Npr. za radijvektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ uzevši u obzir da je $P = x$, $Q = y$ i $R = z$ prema (218) imamo:

$$div\ grad\ \vec{r} = \nabla\ \nabla \vec{r} = \Delta\ \vec{r} = \vec{i}\cdot 0 + \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\cdot 0 = 0$$

Izračunaj

$$\Delta\ \vec{v}\ za\ \vec{v} = (x^2\ y^2 z^2)\ \vec{i} + (2x^2 - y^3 + z^4)\ \vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\ \vec{k}$$

$$\left[\Delta\ \vec{v} = (2y^2 z^2 + 2x^2 z^2 + 2x^2 y^2)\ \vec{i} + (4 - 6y + 12z^2)\ \vec{j} + 6\ \vec{k}\right]$$

Izračunajmo *div grad*, odnosno Δ produkta dviju skalarnih funkcija U i V:

$$div\ grad\,(UV) = \Delta\,(UV) = \nabla^2\,(UV) = \nabla\nabla\,(UV) = \text{prema (208)} =$$
$$= \nabla(U\nabla V + V\nabla U) = U\nabla^2 V + \nabla V\nabla U + V\nabla^2 U + \nabla U\nabla V =$$
$$= U\nabla^2 V + 2\nabla U\nabla V + V\nabla^2 U = U\Delta V + 2\nabla U\nabla V + V\Delta U =$$
$$= U\ div\ grad\ V + 2\ grad\ U\ grad\ V + V\ div\ grad\ U. \qquad (218a)$$

Pokaži na slični način, da je

$$\left.\begin{aligned} &div\ grad\ (U + V) = \Delta(U + V) = \\ &= \Delta U + \Delta V = div\ grad\ U + div\ grad\ V \end{aligned}\right\} \qquad (218b)$$

2. Izračunajmo sada divergenciju polja rotora $\vec{v}$.

Unaprijed možemo kazati, da ćemo za divergenciju vrtložnog polja dobiti nulu, ako se sjetimo hidrodinamičke interpretacije pojma divergencije i rotora vektorskog polja: očito je, da je izdašnost izvora jednaka nuli u slučaju kruženja tekućine.

$$div\ rot\ \vec{v} = \nabla\ rot\ \vec{v} = \frac{\partial(rot\ \vec{v})_x}{\partial x} + \frac{\partial(rot\ \vec{v})_y}{\partial y} + \frac{\partial(rot\ \vec{v})_z}{\partial z} =$$

$$= \text{prema (204)} = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z}\right) = 0$$

jer se svi članovi poništavaju. Dakle

$$\underline{div\ rot\ \vec{v} = 0}$$

Do istog rezultata dolazimo mnogo brže formalnom primjenom operatora ∇:

$$div\ rot\ \vec{v} = \nabla(\nabla \times \vec{v}) = (\nabla \times \nabla)\vec{v} = \text{prema (217)} = 0 \cdot \vec{v} = 0$$

Divergencija vrtložnog polja jednaka je nuli, dakle vrtložno polje nema izvora.

Polje, kome je svuda divergencija jednaka nuli, zove se **solenoidalno** (cijevno) vektorsko polje, jer krivulje toka, t. j. krivulje, koje u svakoj točki polja diraju pripadni vektor (silinice), prolazeći duž zatvorene krivulje polja čine plohe oblika cijevi.

3. Kako je vektorsko polje gradijenta ili potencijala bezvrtložno polje, mora biti $rot\ grad\ U = 0$.

Pokažimo to!

Uzevši u obzir formule (211) i (199) dodijemo:

$$rot\ grad\ U = \nabla \times grad\ U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right) = 0$$

$$\underline{rot\ grad\ U = 0}$$

Isto uz formalnu primjenu operatora:

$$rot\ grad\ U = \nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla)U = 0 \cdot U = 0$$

Polje gradijenta ili potencijalno polje nema vrtloga.

4. Izračunajmo sada gradijent skalarnog polja divergencije vektora $\vec{v}$:

$$grad\ div\ \vec{v} = \nabla(\nabla \vec{v}) =$$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) div\ \vec{v} =$$

$$= \vec{i}\,\frac{\partial\, div\ \vec{v}}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\, div\ \vec{v}}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\, div\ \vec{v}}{\partial z}$$

a kako je

$$div\ \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

dobijemo:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} = \vec{i}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right) +$$

$$+ \vec{j}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right) \qquad (219)$$

5. Izračunajmo rotor polja rotora vektora $\vec{v}$, t. j. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}$.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \text{prama (211) i (204)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right) -$$

$$- \vec{j}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z}\right)$$

Sada ćemo desnoj strani dobivene jednakosti dodati $\vec{i}\,\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \vec{j}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \vec{k}\,\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}$ i isti izraz oduzeti.

Nakon uređenja dobijemo:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{i}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right) +$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right) - \left\{\vec{i}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) +\right.$$

$$\left. + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\right\} = \text{prema (219) i (218)} =$$

$$= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v} \qquad (220)$$

Mnogo jednostavnije i brže dolazimo do tog izraza formalno primijenjujući operator ∇. Uzevši u obzir formulu (32) za trostruki vektorski produkt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \text{ dobijemo:}$$

$$rot\ rot\ \vec{v} = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla\vec{v}) - \vec{v}(\nabla\nabla) =$$

$$= grad\ div\ \vec{v} - \nabla^2\vec{v} = \text{prema (216)} =$$

$$= grad\ div\ \vec{v} - \Delta\vec{v} = grad\ div\ \vec{v} - div\ grad\ \vec{v}$$

ili

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla\vec{v}) - \Delta\vec{v} \qquad \textbf{(220a)}$$

Odatle slijedi simbolički oblik formule (219) za *grad div* $\vec{v}$:

$$grad\ div\ \vec{v} = rot\ rot\ \vec{v} + div\ grad\ \vec{v} \qquad (219a)$$

ili

$$\nabla(\nabla\vec{v}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \Delta\vec{v} \qquad (219b)$$

6. Izvedimo $\Delta f(U)$, t. j. *div grad* polja skalarne funkcije $U(x, y, z)$.

$$\Delta f(U) = div\ \{grad\ f(U)\} = \text{prema (208)} =$$

$$= div\ \{f'(U)\ grad\ U\} = \text{prema (210)} =$$

$$= f'(U)\ div\ grad\ U + grad\ U \cdot grad\ f'(U) =$$

$$= \text{prema (208)} = f'(U)\ div\ grad\ U + grad\ U \cdot f''(U) \cdot grad\ U =$$

$$= f'(U)\Delta U + f''(U)\,(\nabla U)^2$$

$$\Delta f(U) = f'(U)\Delta U + f''(U)\,(\nabla U)^2 \qquad \textbf{(220a)}$$

Na primjer:

$$\Delta U^2 = 2U \cdot \Delta U + 2 \cdot (\nabla U)^2$$

Do iste formule dolazimo, ako u formulu (218a) uvrstimo $V = U$.

$$\Delta U^3 = 3U^2\Delta U + 6U(\nabla U)^2.$$

7. Izvedimo $\Delta(UVW)$, gdje su U, V i W tri skalarna polja.

$$\Delta(UVW) = \Delta\{U(VW)\} = \text{prema (218a)} =$$

$$= U\Delta(VW) + 2\nabla U(\nabla VW) + (VW)\Delta U =$$

$$= \text{prema (218a) i (208)} =$$

$$= U\{V\Delta W + 2(\nabla V\nabla W) + W\Delta V\} + 2\nabla U(V\nabla W + W\nabla V) + VW\Delta U =$$

$$= UV\Delta W + UW\Delta V + VW\Delta U + 2(U\nabla V\nabla W + V\nabla U\nabla W + W\nabla U\nabla V)$$

Uvrstimo li u tu formulu $V = U$ i $W = U$, dobijemo gore izvedeni izraz za ΔU^2

8. Izvedimo $\Delta f(r)$, gdje je $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\Delta f(r) = \nabla [\nabla f(r)] = \text{prema (208)} = \nabla \{ f_r' \nabla r \} = \text{prema (b) str. 410.} =$$

$$= \nabla \left\{ f_r' \frac{\vec{r}}{r} \right\} = \text{prema(210)} = \frac{f_r'}{r} \nabla \vec{r} + \vec{r} \nabla \frac{f_r'}{r} =$$

$$= \text{prema (210a) i (208)} = \frac{f_r'}{r} \cdot 3 + \vec{r} \left\{ f_r' \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \nabla f_r' \right\} =$$

$$= \text{prema (c) str. 410, (208) i (b)} =$$

$$= \frac{3f_r'}{r} + \vec{r} \left\{ -f_r' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{r} f_r'' \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right\} =$$

$$= \frac{3f_r'}{r} - f_r' \frac{r^2}{r^3} + f_r'' = \frac{2f_r'}{r} + f_r'' =$$

$$= \frac{1}{r^2} \left\{ 2r f_r' + r^2 f_r'' \right\} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f_r')$$

jer je

$$\frac{d}{dr} (r^2 f_r') = r^2 \cdot f_r'' + f_r' \cdot 2r$$

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f_r') \qquad (220b)$$

Na primjer:

$$\Delta r = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \cdot 1) = \frac{1}{r^2} \cdot 2r = \underline{\frac{2}{r}}$$

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right\} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (-1) = \frac{1}{r^2} \cdot 0 = \underline{0}$$

$$\Delta r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \cdot 2r) = \frac{1}{r^2} 6 r^2 = \underline{6}$$

Primijetimo, da gore izvedeni izraz (220b) za $\Delta f(r)$ možemo dobiti i tako, da neposredno primijenimo formule (214):

$$div\, grad\, f(r) = \nabla \nabla f(r) = \Delta f(r) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}$$

Izračunamo li za $f(r)$ te tri druge parcijalne derivacije pa ih zbrojimo, dobit ćemo nakon uređenja

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2 f'(r)}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 f_r')$$

Na isti način možemo izračunati

$$\Delta r, \Delta \frac{1}{r}, \Delta r^2 \text{ itd.}$$

Napravi to!

Primijetimo još, da možemo izračunati i onu funkciju $f(r)$ za koju je $\Delta f(r) = 0$. Stavimo li

$$\Delta f(r) = f''(r) + 2 \frac{f'(r)}{r} = 0$$

pa riješimo li tu diferencijalnu jednadžbu uz substituciju $f'(r) = p$ [vidi Dio II, § 10, 3. b)], dobit ćemo

$$f(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Izvedi to!

9. Izvedimo, konačno, izraz za $\Delta\{\Delta f(r)\}$.

$$\Delta\{\Delta f(r)\} = \text{prema (220b)} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\Delta f\right) =$$

$$= \text{prema (220b)} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2 \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 f_r')\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2 \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}(r^2 f_r'' + f_r' \cdot 2r)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2 \frac{d}{dr}\left[f_r'' + \frac{2f_r'}{r}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2\left[f_r''' + 2\,\frac{rf_r'' - f_r'}{r^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\{r^2 f_r''' + 2rf_r'' - 2f_r'\} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\{r^2 f_r^{(4)} + f_r''' \cdot 2r + 2rf_r''' + 2f_r'' - 2f_r''\} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\{r^2 f_r^{(4)} + 4rf_r'''\} =$$

$$= \frac{1}{r^4}\{r^4 f_r^{(4)} + 4r^3 f_r'''\} = \frac{1}{r^4}\frac{d}{dr}\left(r^4 \frac{d^3 f}{dr^3}\right)$$

jer je

$$\frac{d}{dr}\left(r^4\frac{d^3f}{dr^3}\right)=r^4f_r^{(4)}+4r^3f_r'''$$

$$\Delta\{\Delta f(r)\}=\frac{1}{r^4}\frac{d}{dr}\left(r^4\frac{d^3f}{dr^3}\right) \qquad (220c)$$

Na primjer:

$$\Delta(\Delta r)=\frac{1}{r^4}\cdot\frac{d}{dr}(r^4\cdot 0)=\underline{0}$$

$$\Delta(\Delta r^2)=\frac{1}{r^4}\cdot\frac{d}{dr}(r^4\cdot 0)=\underline{0}$$

$$\Delta(\Delta r^3)=\frac{1}{r^4}\cdot\frac{d}{dr}(r^4\cdot 6)=\frac{1}{r^4}\cdot 24r^3=\underline{\frac{24}{r}}$$

$$\Delta\left(\Delta\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^4}\cdot\frac{d}{dr}\left(-r^4\cdot\frac{6}{r^4}\right)=\underline{0}$$

$$\Delta\left(\Delta\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r^4}\cdot\frac{d}{dr}\left(-r^4\cdot\frac{24}{r^5}\right)=\frac{1}{r^4}\cdot\frac{d}{dr}\left(-\frac{24}{r}\right)=\frac{1}{r^4}\cdot\frac{24}{r^2}=\underline{\frac{24}{r^6}}$$

§ 14. SUSTAVI OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Uzmimo najprije sustav od dvije diferencijalne jednadžbe prvoga reda, jer ga možemo lako geometrijski interpretirati. Taj sustav ima općenito oblik

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f_1(x,y,z)\\ \frac{dz}{dx}&=f_2(x,y,z)\end{aligned} \qquad (a)$$

Kako se vidi iz samih jednadžbi sustava, x je nezavisna promjenljiva, dok su y i z funkcije od x. Zadatak se svodi na određivanje tih funkcija $y = y(x)$ i $z = z(x)$, koje će identički zadovoljavati obje diferencijalne jednadžbe zadanog sustava.

Iz teorije prostornih krivulja (vidi § 9, 1) znamo, da te funkcije $y = y(x)$ i $z = z(x)$ uzete zajedno predočuju ortogonalne projekcije prostorne krivulje na koordinatne ravnine XY i XZ, pa se zadatak svodi geometrijski na određivanje te prostorne krivulje.

U drugu ruku znamo, da prema formuli (156a) jednadžba tangente na prostornu krivulju u najopćenitijem obliku glasi

$$\frac{x-x_1}{dx}=\frac{y-y_1}{dy}=\frac{z-z_1}{dz}$$

ili, ako sve nazivnike podijelimo s dx:

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{z-z_1}{\frac{dz}{dx}}$$

Uvrštenje vrijednosti $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{dz}{dx}$, zadanih sustavom (a) diferencijalnih jednadžbi, daje

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{f_1(x,y,z)}=\frac{z-z_1}{f_2(x,y,z)}$$

Usporedimo li tu jednadžbu s jednadžbom pravca u kanonskom obliku (38), vidimo da koeficijenti smjera tangente na prostornu krivulju zadanu sustavom diferencijalnih jednadžbi (a), glase

$$1,\ f_1(x,y,z)\ \text{i}\ f_2(x,y,z)$$

odnosno su kosinusi kutova α, β i γ, što ih tangenta zatvara s koordinatnim osima, razmjerni s 1, $f_1(x,y,z)$ i $f_2(x,y,z)$.

Kako su koeficijenti smjera tangente funkcije od x, y i z, zaključujemo, da sustav (a) diferencijalnih jednadžbi prvog reda definira polje smjerova u prostoru, jer dodjeljuje svakoj točki prostora, u kojem su definirane funkcije f_1 i f_2, smjer tangente na onu prostornu krivulju $y(x)$, $z(x)$, koja prolazi tom točkom. Riješiti zadani sustav (a) znači dakle odrediti familiju prostornih krivulja, koje u svakoj svojoj točki imaju smjer propisan zadanim sustavom diferencijalnih jednadžbi.

Da dobijemo partikularno rješenje sustava ili geometrijski jednu naročitu krivulju te familije, moramo uvesti početne uvjete, tj. moramo zadati jednu točku (x_1, y_1, z_1), kojom ta naročita krivulja ima proći.

Ako je polje smjerova u prostoru definirano s tri funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$, tada sustav (a) prima oblik:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad \text{(a)'}$$

ili

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)}$$

Primijetimo da se i sustav (a) često piše u obliku (a)' jer iz (a) slijedi

$$dx=\frac{dy}{f_1(x,y,z)}\ \text{i}\ dx=\frac{dz}{f_2(x,y,z)}$$

pa je

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{f_1(x,y,z)}=\frac{dz}{f_2(x,y,z)}$$

Konačno sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda može imati oblik

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x,y,z,t)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, t)$$

U tom se slučaju traže tri funkcije $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$, tj. tražena familija prostornih krivulja zadana je parametarski. Taj sustav diferencijalnih jednadžbi možemo i kinematički interpretirati, ako pretpostavimo, da je parametar t vrijeme.

Kako je brzina derivacija puta po vremenu, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ i $\frac{dz}{dt}$ predočuju brzine gibanja u smjeru koordinatnih osi kao funkcije točke (x, y, z) i vremena t, tj. zadani sustav diferencijalnih jednadžbi definira vektorsko polje brzina. Riješiti taj sustav znači, dakle, odrediti sva ona gibanja u prostoru, koja u svakoj zadanoj točki (x, y, z) prostora i u svaki zadani moment t imaju brzinu propisanu zadanim sustavom diferencijalnih jednadžbi.

Kako se rješavaju odnosno integriraju navedeni sustavi diferencijalnih jednadžbi, pokazat ćemo na primjerima.

Primjeri

$$\frac{dy}{dx} = z + x$$

traže se: $y(x)$ i $z(x)$

$$\frac{dz}{dx} = y - x$$

Derivirajmo po x prvu jednadžbu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + 1$$

Ovamo uvrstimo drugu jednadžbu, pa dobijemo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y - x + 1 \quad \text{ili} \quad y'' - y = -x + 1$$

Dobili smo nehomogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima. Riješimo je prema 1. slučaju (vidi Dio II, § 10, 3.).

Dobijemo

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x - 1 \qquad \text{(a)}$$

a kako je prema prvoj jednadžbi zadanog sustava $z = y' - x$ imat ćemo, izračunavši y' prema (a)

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 1 - x \qquad \text{(b)}$$

Jednadžbe (a) i (b) daju opće rješenje zadanog sustava. Ono predočuje familiju prostornih krivulja, koje ovise o dvjema parametrima C_1 i C_2.

Odredimo sada partikularno rješenje sustava, tj. odredimo jednu naročitu prostornu krivulju, koja neka prolazi točkom $T_1 (0, 3, 1)$ prostora.

Uvrštenje koordinata točke T_1 u opće rješenje daje:

$$3 = C_1 + C_2 - 1$$
$$1 = C_1 - C_2 + 1$$

Odatle:

$$C_1 = 2 \text{ i } C_2 = 2$$

Uvrštenje u (a) i (b) daje:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2(e^{x} + e^{-x}) + x - 1 \\ z &= 2(e^{x} - e^{-x}) - x + 1 \end{aligned}\right| \text{, partikularno rješenje za početni uvjet } T_1\ (0, 3, 1).$$

Vidimo, da se rješavanje sustava od dvije diferencijalne jednadžbe s dvije tražene funkcije svodi na rješavanje jedne diferencijalne jednadžbe drugog reda s jednom nepoznatom funkcijom. Ta jednadžba daje općem rješenju sustava dvije konstante ili dva parametra C_1 i C_2 po volji.

Može se pokazati, da se sustav od n diferencijalnih jednadžbi s n traženih funkcija svodi na jednu diferencijalnu jednadžbu reda $n + n = 2n$ s jednom traženom funkcijom. Taj broj $2n$ određuje i broj parametara u općem rješenju sustava.

2.

$$\frac{dx}{dt} = y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = z + x \qquad \text{Traže se: } x(t),\ y(t) \text{ i } z(t).$$
$$\frac{dz}{dt} = x + y$$

Derivirajmo po t prvu jednadžbu pa u nj uvrstimo dvije druge jednadžbe sustava, pri čemu označivat ćemo, kao obično, derivacije po t točkama:

$$\ddot{x} = \dot{y} + \dot{z}$$
$$\ddot{x} = 2x + y + z$$

a kako je prema prvoj jednadžbi $y + z = \dot{x}$, dobijemo

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$$

Riješimo tu homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu (vidi Dio II).

Dobijemo

$$\underline{x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}} \qquad \text{(a)}$$

Iz prve i druge jednadžbe zadanog sustava slijedi

$$\dot{x} - \dot{y} = y - x$$

ili

$$\dot{y} + y = \dot{x} + x$$

Uvrštenje (a) i

$$\dot{x} = -C_1 e^{-t} + 2 C_2 e^{2t}$$

daje:

$$\dot{y} + y = 3 C_2 e^{2t}$$

Riješimo tu linearnu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu načinom varijacije konstanata (vidi Dio II).

Dobijemo

$$\underline{y = C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}} \qquad \text{(b)}$$

Iz prve jednadžbe zadanog sustava slijedi:

$$z = \dot{x} - y$$

Uvrštenje $\dot{x}$ i (b) daje

$$\underline{z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}} \qquad \text{(c)}$$

Dobiveno opće rješenje (a), (b) i (c) parametarskog oblika predočuje familiju krivulja u prostoru koje ovise o trima parametrima C_1, C_2 i C_3. Te integralne krivulje imaju u svakoj svojoj točki smjer propisan zadanim sustavom diferencijalnih jednadžbi.

Prihvatimo li kinematičku interpretaciju zadanog sustava, tada rješenja (a), (b) i (c) predočuju sva ona gibanja u prostoru, koja u svakoj točki prostora imaju brzinu, i koja odgovara onom vektorskom polju brzina, koje je određeno zadanim sustavom.

Da odredimo partikularno rješenje sustava, koje bi odgovaralo početnim uvjetima, moramo parametre C_1, C_2 i C_3 prilagoditi tim uvjetima. Uzmimo npr. da nas zanima trajektorija onog gibanja, koje u moment $t_1 = 0$ prolazi točkom $T_1(-1, 1, 9)$.

Uvrštenje tih vrijednosti u opće rješenje daje:

$$-1 = C_1 + C_2$$
$$1 = C_3 + C_2$$
$$9 = -C_1 - C_3 + C_2$$

odatle slijedi

$$C_1 = -4, \quad C_2 = 3 \text{ i } C_3 = -2$$

pa partikularno rješenje glasi

$$x = -4e^{-t} + 3e^{2t}$$
$$y = -2e^{-t} + 3e^{2t} \qquad \text{(e)}$$
$$z = 6e^{-t} + 3e^{2t}$$

Ono predočuje traženu trajektoriju onog gibanja u prostoru, koje prolazi zadanom točkom T_1 u moment $t_1 = 0$. Da se uvjerimo da krivulja zadovoljava uvjete postavljene zadanim sustavom diferencijalnih jednadžbi, odredimo brzine gibanja u smjeru koordinatnih osi, tj. $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$.

Prema (d) imamo:

$$\dot{x} = 4e^{-t} + 6e^{2t}$$
$$\dot{y} = 2e^{-t} + 6e^{2t}$$
$$\dot{z} = -6e^{-t} + 6e^{2t}$$

$$y + z = 4e^{-t} + 6e^{2t}$$
$$z + x = 2e^{-t} + 6e^{2t}$$
$$x + y = -6e^{-t} + 6e^{2t}$$

pa je

$$\dot{x} = y + z$$
$$\dot{y} = z + x$$
$$\dot{z} = x + z$$

a to je zadani sustav diferencijalnih jednadžbi.

3. $$\frac{dx}{x-y}=\frac{dy}{x+y}=\frac{dz}{z}$$

Traže se $y(x)$ i $z(x)$.

Iz prva dva člana zadanog sustava slijedi

$$xdx+ydx=xdy-ydy$$

ili

$$xdx+ydy=xdy-ydx \qquad (a)$$

Prelazimo na polarne koordinate:

$$r^2=x^2+y^2$$

odatle

$$r\,dr=x\,dx+y\,dy$$

Uvrštenje u (a) daje

$$r\,dr=x\,dy-y\,dx \quad | : r^2=x^2+y^2$$

$$\frac{dr}{r}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

Kako je $tg\,\varphi=\frac{y}{x}$ pa je $\varphi=arc\,tg\frac{y}{x}$,

dobijemo

$$d\varphi=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

pa je

$$\frac{dr}{r}=d\,arc\,tg\frac{y}{x}$$

Integriranje daje

$$ln\,r=arc\,tg\frac{y}{x}+C_1$$

ili

$$\underline{ln\,r-arc\,tg\frac{y}{x}=C_1} \qquad (b)$$

Iz

$$\frac{dz}{z}=\frac{dr}{r}$$

Slijedi

$$ln\,z=ln\,r+ln\,C_2$$

dakle

$$\underline{z=C_2\,r} \qquad (c)$$

Iz dobivenih rješenja (b) i (c) možemo y i z izraziti pomoću x, r, C_1 i C_2, gdje je $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

4. $$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$$

Primijenivši poznato svojstvo razmjera dobijemo:

$$\frac{dx+dy+dz}{(z-y)+(x-z)+(y-x)}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$

Ta jednakost ima smisla samo u tom slučaju, ako je i brojnik u desnoj strani jednakosti jednak 0, tj. ako dobijemo $\frac{0}{0}$, poznati nam neodređeni oblik (vidi Dio I).

Imamo dakle

$$dx+dy+dz=0$$

Integriranje daje

$$\underline{x+y+z=C_1} \qquad (a)$$

Odatle

$$z = C_1 - x - y$$

pa je

$$z - y = C_1 - x - 2y$$

$$x - z = -C_1 + 2x + y$$

Uvrštenje u zadani sustav daje

$$\frac{dx}{C_1 - x - 2y} = \frac{dy}{-C_1 + 2x + y}$$

ili

$$(-C_1 + 2x + y)\,dx - (C_1 - x - 2y)\,dy = 0$$

Dobili smo diferencijalnu jednadžbu, kojoj je lijeva strana egzaktni diferencijal, jer je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, pa prema § 8 imamo:

$$-C_1x + x^2 + xy - C_1y + y^2 = C_2'$$

Uvrštenje $C_1 = x + y + z$ daje nakon uređenja:

$$C_2 = -xy - xz - yz$$

Da pojednostavimo dobiveno rješenje, izračunajmo:

$$C_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

a odatle je

$$-xy - xz - yz = -\frac{C_1^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

Uvrštenje u izraz za C_2' daje:

$$C_2' = -\frac{C_1^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

pa je

$$x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{2C_2' + C_1^2}_{C_2}$$

$$\underline{x^2 + y^2 + z^2 = C_2} \qquad \text{(b)}$$

Iz dobivenih rješenja (a) i (b) vidimo, da opće rješenje zadanog sustava predočuje geometrijski familiju prostornih krivulja, koje su zadane kao presjeci paralelnih ravnina $\frac{x}{C_1} + \frac{y}{C_1} + \frac{z}{C_1} = 1$, koje sijeku na koordinatnim osima jednake segmente C_1 po volji, i koncentričnih kuglinih ploha polumjera $\sqrt{C_2}$ po volji sa središtem u ishodištu 0.

5.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - y}{z - t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x - y}{z - t}$$

$$\frac{dz}{dt} = x - y + t$$

Iz prvih dviju jednadžbi sustava slijedi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$dx = dy$$

pa je

$$\underline{x + y = C_1} \qquad \text{(a)}$$

Uvrštenje u treću jednadžbu daje:

$$\frac{dz}{dt} = C_1 + 1$$

pa je

$$\underline{z = (C_1 + 1)\,t + C_2} \qquad \text{(b)}$$

Uvrštenje (a) i (b) u drugu jednadžbu sustava daje:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{(C_1 + 1)t + C_2 - t}$$

ili

$$dy = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}\,dt$$

Odatle

$$y = C_1 \int \frac{dt}{C_1 t + C_2} + C_3 = \ln (C_1 t + C_2) + C_3$$

$$\underline{y = \ln (C_1 t + C_2) + C_3} \qquad \text{(c)}$$

Da izrazimo i x kao funkciju od t, C_1, C_2 i C_3, uvrstimo (c) u (a).
Dobijemo:

$$\underline{x = \ln (C_1 t + C_2) + C_3 + C_1} \qquad \text{(a)}'$$

Pri kinematičkoj interpretaciji dobiveno opće rješenje (a)', (b) i (c) predočuje sva gibanja u prostoru, kojim je brzina u svakoj točki određena zadanim sustavom diferencijalnih jednadžbi.

Odredimo partikularno rješenje, tj. trajektoriju onog gibanja, koje u moment $t_1 = 0$, prolazi točkom T_1 (1, 2, e).

Uvrštenje tih vrijednosti u (a)', (b) i (c) daje:

$$1 = C_1 + \ln C_2 + C_3$$
$$2 = \ln C_2 + C_3$$
$$e = C_2$$

Odatle

$$C_1 = -1$$
$$C_2 = e$$
$$C_3 = 1$$

Uvrštenje u (a)', (b) i (c) daje partikularno rješenje, koje odgovara zadanom početnom uvjetu:

$$x = \ln (e - t)$$
$$y = \ln (e - t) + 1$$
$$z = e$$

Budući da je $z = e = const$, dobivena trajektorija leži u ravnini, koja je paralelna s ravninom XY a udaljena od nje za e, pa se projicira u ravninu XY u pravoj veličini. Nariši tu krivulju!

Riješi sustave diferencijalnih jednadžbi:

1. $$\frac{dy}{dx} = z; \quad \frac{dz}{dx} = y$$

Partikularno rješenje kroz T_1 (0, 1, 0)

[$y = ch\,x$; $z = sh\,x$]

2. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}$

$$\left[y = C_1 x;\ z = (C_1 + 1) x + C_2 \right]$$

3. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{xy}$

$$\left[y = C_1 x;\ z = \sqrt{C_1 x^2 - C_2} \right].$$

4. $\frac{dx}{dt} = y + z;\quad \frac{dy}{dt} = 2x - 2z;\quad \frac{dz}{dt} = 2x + 2y$

Partikularno rješenje za $t_1 = 0$ kroz $T_1\ (1, 1, 1)$

$$[x = 2t^2 + 2t + 1;\ y = -2t^2 + 1;\ z = 2t^2 + 4t + 1]$$

5.

$$\frac{dx}{dt} = y - 7x;\quad \frac{dy}{dt} = -2x + 5y$$

$$\left[x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t); \right.$$

$$\left. y = e^{-6t} \{(C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t)\} \right]$$

§ 15. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Uzet ćemo samo jedan tip tih jednadžbi i to linearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvoga reda. Ta jednadžba ima općenito oblik

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

gdje su P, Q i R zadane neprekinute funkcije od x, y i z.

Traži se funkcija $z = z(x, y)$, koja identički zadovoljava zadanu diferencijalnu jednadžbu.

Diferencijalne jednadžbe toga tipa zovu se **linearne**, jer su obje parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ u prvom stupnju. Budući da tražena funkcija z ne mora biti u jednadžbi linearna, pojam linearnosti parcijalnih diferencijalnih jednadžbi ne podudara se s pojmom linearnosti običnih diferencijalnih jednadžbi (vidi Dio II. § 10, 2), pa se te jednadžbe zovu također kvazi-linearne diferencijalne jednadžbe.

Znamo, da opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe predočuje geometrijski familiju krivulja u ravnini, koja ovisi o jednom ili o više parametara. Po analogiji očekujemo, da će opće rješenje zadane parcijalne diferencijalne jednadžbe predočivati familiju ploha u prostoru, jer tražena funkcija $z = z(x, y)$, koja ima da zadovolji diferencijalnu jednadžbu, predočuje plohu u prostoru.

Da na što jednostavniji i pregledniji način rastumačimo rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi toga tipa, provedimo vektorsko-geometrijsku interpretaciju zadane diferencijalne jednadžbe i traženog općeg rješenja jednadžbe. U tu

svrhu definirajmo u onom dijelu prostora, u kojem su određene zadane funkcije P, Q i R, vektorsko polje tako, da svakoj točki toga dijela prostora dodijelimo vektor $\vec{v}$, kojemu su komponente $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$, pa je

$$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \qquad (a)$$

Normali bilo koje od traženih integralnih ploha dodijelimo u nekoj točki $T(x, y, z)$ te plohe jedinični vektor $\vec{n}_0$.

Znamo, da prema (77) jednadžba normale na plohu $z = z(x, y)$ glasi:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{-1}$$

pa su kosinusi smjera normale, a dakle i kosinusi smjera vektora $\vec{n}_0$:

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Budući da su komponente jediničnog vektora jednake kosinusima njegova smjera, bit će

$$\vec{n}_0 = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\vec{i} + \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\vec{j} + \frac{-1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\vec{k}$$

Podijelimo li zadanu diferencijalnu jednadžbu, koju pišemo u obliku

$$Pp + Qq - R = 0$$

s

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

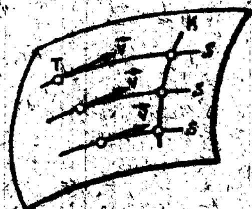
dobijemo

$$P\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + Q\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + R\frac{-1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0$$

Prema (18) predočuje lijeva strana dobivene jednakosti skalarni produkt vektora $\vec{v}$ i $\vec{n}_0$, pa kako je taj skalarni produkt jednak nuli, zaključujemo, da vektor $\vec{v}$ stoji okomito na vektoru normale $\vec{n}_0$, leži dakle u tangentnoj ravnini one integralne plohe, koja prolazi njegovom početnom točkom $T(x, y, z)$ (vidi sl. 188).

Naš je zadatak sada, da odredimo one plohe u prostoru, kojim tangentne ravnine u bilo kojoj točki sadrže vektor $\vec{v}$, koji je dodijeljen toj točki. Te će plohe biti tražena rješenja zadane diferencijalne jednadžbe, t. j. integralne plohe.

Pretpostavimo, da je definirano vektorsko polje $\vec{v}$ polje sila, pa odredimo silnice toga polja sila, t. j. prostorne krivulje, koje imaju za tangentu u svakoj svojoj točki silu $\vec{v}$, koja pripada toj točki. Te



Sl. 188

prostorne krivulje bit će izvodnice traženih integralnih ploha, a zovu se **karakteristične krivulje parcijalne diferencijalne jednadžbe** (na slici 188 krivulje S).

Potražimo najprije diferencijalne jednadžbe silnica.

Prema (156a) znamo napisati jednadžbu tangente na silnicu, t. j. na prostornu krivulju:

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

gdje su dx, dy i dz koeficijenti smjera te tangente, dok su prema (a)

$$\cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \; ; \; \cos\beta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \text{ i } \cos\gamma = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

kosinusi smjera sile $\vec{v}$ definiranog polja sila, a

$$P = \cos\alpha \cdot \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \; ; \; Q = \cos\beta \cdot \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$
$$\text{i } R = \cos\gamma \cdot \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

koeficijenti smjera te sile $\vec{v}$.

Budući da sile $\vec{v}$ polja sila tangiraju silnice toga polja, one imaju smjer tangenata na silnice, a uvjet paralelnosti dvaju pravaca ili smjerova nam je poznat: koeficijenti smjera moraju biti proporcionalni, t. j.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{221}$$

To je tražena diferencijalna jednadžba silnica, odnosno karakterističnih krivulja diferencijalne jednadžbe.

Točnije je to sustav od dvije obične diferencijalne jednadžbe prvog reda za dvije funkcije y i z, jer iz (221) slijedi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)}$$

Riješimo li taj sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, dobit ćemo kao opće rješenje sustava:

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x, C_1, C_2) \\ z &= z(x, C_1, C_2) \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

gdje su C_1 i C_2 konstante po volji. (Vidi § 14.)

Kako vidimo, silnice, odnosno karakteristične krivulje zadane su svojim ortogonalnim projekcijama na koordinatne ravnine XY i XZ, pri čemu familija tih prostornih krivulja ovisi o dvjema parametrima C_1 i C_2. Svaka integralna ploha zadane parcijalne diferencijalne jednadžbe izlazi kao opisana od silnica, koje se kod svoga gibanja opiru o jednu ravnalicu K, zadanu na pr. kao presjek dviju ploha:

$$f_1(x, y, z) = 0$$
$$f_2(x, y, z) = 0 \qquad \text{(c)}$$

To znači: kad se silnice pomiču opirajući se o zadanu ravnalicu K, one izvode jednu od integralnih ploha, jer smo pokazali, da sila $\vec{v}$ tangira u svakoj točki polja onu silnicu, koja prolazi tom točkom, a budući da su integralne plohe one plohe, koje tangiraju silu $\vec{v}$, izvodit će silnice pri svom pomicanju baš tražene integralne plohe (vidi sl. 188).

Da, konačno, odredimo jednadžbu integralne plohe, napišemo uvjet, da ista točka $T(x, y, z)$ leži i na ravnalici i na karakterističnoj krivulji, koja tom točkom prolazi, a to znači, da su koordinate x, y i z točke T zajednička rješenja jednadžbi (b) karakteristične krivulje i jednadžbi (c) ravnalice. Iz prvih triju jednadžbi sustava (b) i (c) možemo izračunati x, y i z izrazivši ih s C_1 i C_2, pa uvrstivši tako dobivene vrijednosti za x, y i z u četvrtu jednadžbu dobijemo jednadžbu oblika

$$F(C_1, C_2) = 0 \qquad (222)$$

Jednadžbe (b) karakterističnih krivulja možemo napisati i u obliku

$$C_1 = u(x, y, z)$$
$$C_2 = v(x, y, z)$$

izračunavši iz tih jednadžbi C_1 i C_2.

Uvrstimo li te jednadžbe u (222), dobijemo

opće rješenje linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe:

$$F[u(x, y, z), \quad v(x, y, z)] = 0 \qquad (222a)$$

F je funkcija po volji, jer svakoj ravnalici pripada druga funkcija F.

Da se odredi partikularno rješenje linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe, treba zadati ravnalicu, t. j. prostornu krivulju. Karakteristične krivulje opirajući se o tu ravnalicu opisat će naročitu integralnu plohu, koja odgovara zadanom početnom uvjetu, t. j. zadanoj ravnalici. Vidimo, da su početni uvjeti kod parcijalnih diferencijalnih jednadžbi sasvim druge naravi nego kod običnih diferencijalnih jednadžbi.

Navedimo tri primjera rješavanja linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda, koje su većeg značenja.

1. $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \quad \text{ili} \quad xp + yq = z$$

Prema (221) napišemo sustav diferencijalnih jednadžbi karakterističnih krivulja:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Rješavamo taj sustav:

Iz

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

slijedi

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + ln\, C_1$$

Odatle

$$ln\, y = ln\, x + ln\, C_1$$

ili

$$ln\, y = ln(C_1 \cdot x)$$

pa je

$$y = C_1 \cdot x$$

ili

$$C_1 = \frac{y}{x} \qquad (a)$$

Na isti način iz

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

dobijemo:

$$C_2 = \frac{z}{x} \qquad (b)$$

Uvrštenje (a) i (b) u (222) daje traženo opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe:

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

ili u eksplicitnom obliku:

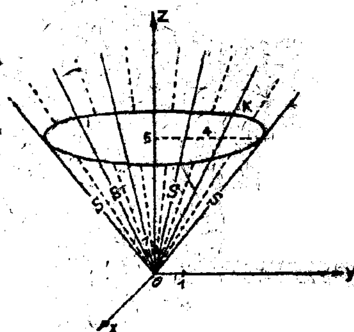
$$z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (c)$$

gdje su F i f funkcije po volji.

Iz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe vidimo, da su integralne plohe stožaste plohe s vrhom u ishodištu koordinatnog sustava, jer jednadžbe karakterističnih krivulja $y = C_1x$ i $z = C_2x$ predočuju dvije familije ravnina, pri čemu su ravnine prve familije okomite na ravnini XY, a druge — na ravnini XZ, dok

ravnine obiju familija prolaze ishodištem. Ravnine tih familija sijeku se u pravcima, koji okrećući se oko ishodišta i klizeći se po bilo kojim ravnalicama opisuju stožaste plohe, kojim su vrhovi u ishodištu.

Da se odredi partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, treba zadati ravnalicu. Uzmimo na pr. za ravnalicu kružnicu:



Sl. 189

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$z = 5$$

(vidi sl. 189).

U opće rješenje (c) diferencijalne jednadžbe, koje napišemo u obliku:

$$\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{(d)}$$

uvrstimo

$$z = 5$$
$$y = \sqrt{16 - x^2} \qquad \text{(d)}$$

Dobijemo:

$$\frac{5}{x} = f\left(\frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}\right) \qquad \text{(e)}$$

Označimo:

$$\frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} = t \qquad \text{(f)}$$

pa izrazimo $\frac{5}{x}$ s t.

Prema (f)

$$\frac{16 - x^2}{x^2} = t^2$$

odatle

$$\frac{16}{x^2} = t^2 + 1 \;/\cdot \frac{25}{16}$$

$$\frac{25}{x^2} = \frac{25}{16}(t^2 + 1)$$

ili

$$\frac{5}{x} = \frac{5}{4}\sqrt{t^2 + 1}$$

Prema (e) imamo:

$$f(t) = \frac{5}{4}\sqrt{t^2 + 1}$$

ili uzevši u obzir, da je prema (f) i (d)

$$t = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} = \frac{y}{x}$$

dobijemo

$$f(t) = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}$$

Uvrštenje u (d) daje:

$$\frac{z}{x} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} \,/\,^2$$

$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{25}{16} \cdot \frac{y^2 + x^2}{x^2} \,/ \cdot 16x^2$$

$$\underline{25x^2 + 25y^2 - 16z^2 = 0}$$

To je traženo partikularno rješenje, koje predočuje stožac prikazan na slici 189.

2.
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Prema (221):

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

Iz $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$, odnosno iz $y\,dy = -x\,dx$ slijedi nakon integriranja:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + C_1' \,/ \cdot 2$$

$$x^2 + y^2 = 2C_1'$$

ili

$$x^2 + y^2 = C_1$$

a iz $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dz}{0}$, odnosno iz $dz = 0$ slijedi

$$z = C_2$$

Karakteristične krivulje su kružnice polumjera po volji $\sqrt{C_1}$, koje su paralelne s ravninom XY, a središte im je na osi Z, jer jednadžba $x^2 + y^2 = C_1$ predočuje prostorno familiju valjaka promjenljiva polumjera $\sqrt{C_1}$ s osi Z kao osi simetrije, koji su presječeni familijom ravnina $z = C_2$ paralelnih s ravninom XY. Tako nastala familija kružnica promjenljivog polumjera pri svojem pomicanju uzduž osi Z uz neku zadanu ravnalicu opisuje familiju rotacionih ploha, kojima je os Z os rotacije.

Prema (222) dobivamo jednadžbu tih rotacionih ploha, odnosno opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe:

$$\underline{F(x^2 + y^2, z) = 0}$$

ili u eksplicitnom obliku

$$\underline{z = f(x^2 + y^2)} \qquad (a)$$

gdje su F i f funkcije po volji.

Odredimo partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe zadavši za ravnalicu pravac:

$$x = 3$$

$$y = 4$$

koji je paralelan s osi Z (ravnine $x = 3$ i $y = 4$, koje su okomite na ravnini XY, sijeku se u pravcu, koji je okomit na ravnini XY, dakle paralelan s osi Z).

Uvrštenje u (a) daje:

$$z = f(9 + 16)$$

ili

$$z = f(25)$$

Uvrštenje u (a) daje

$$f(25) = f(x^2 + y^2)$$

Odatle

$$\underline{x^2 + y^2 = 25}$$

To je traženo partikularno rješenje, koje predočuje valjak polumjera 5, kojemu je os simetrije os Z. Karakteristične krivulje (kružnice), pri svom pomicanju uzduž osi Z skližu se po zadanom pravcu (ravnalici), a budući da je taj pravac paralelan s osi Z, a udaljen od nje za $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, opisuju uspravni kružni valjak polumjera baze 5.

3.
$$2\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 5$$

Prema (221):

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{-3} = \frac{dz}{5}$$

Iz $\frac{dx}{2} = \frac{dy}{-3}$ i $\frac{dx}{2} = \frac{dz}{5}$ dobijemo integriranjem:

$$3x + 2y = C_1 \quad , \quad 5x - 2z = C_2 \qquad (a)$$

Uvrštenje u (222) daje traženo opće rješenje:

$$\underline{F(3x + 2y,\ 5x - 2z) = 0}$$

ili

$$\underline{3x + 2y = f(5x - 2z)}$$

gdje su F i f funkcije po volji.

Pokažimo, da opće rješenje predočuje familiju valjkastih ploha, t. j. ploha, što ih opisuje pravac, koji se pomiče u prostoru ostajući pri tome paralelan sam sebi.

Napisavši jednadžbe (a) karakterističnih krivulja u obliku:

$$x = \frac{C_1 - 2y}{3} = \frac{y - \frac{C_1}{2}}{-\frac{3}{2}} \quad ; \quad x = \frac{C_2 + 2z}{5} = \frac{z + \frac{C_2}{2}}{\frac{5}{2}}$$

dobivamo jednadžbu pravca u prostoru u obliku

$$\frac{x}{1} = \frac{y - \frac{C_1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{z + \frac{C_2}{2}}{\frac{5}{2}}$$

ili

$$\frac{x}{2} = \frac{y - \frac{C_1}{2}}{-3} = \frac{z + \frac{C_2}{2}}{5}$$

koji ima konstantne koeficijente smjera, a prolazi točkom $T\left(0, \frac{C_1}{2}, -\frac{C_2}{2}\right)$ po volji (vidi § 3, 2). Karakteristične krivulje su dakle paralelni pravci.

Mijenjamo li vrijednosti parametara C_1 i C_2, t. j. koordinate točke T, time pomičemo pravac u prostoru tako, da ostaje uvijek paralelan sam sebi. Pri tom pomicanju opisuje pravac valjkastu plohu.

Da odredimo partikularno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe, odnosno jednu naročitu valjkastu plohu familije ploha zadanih općim rješenjem, moramo zadati ravnalicu, t. j. prostornu krivulju, po kojoj će se klizati taj pravac i tako opisivati tu naročitu valjkastu plohu.

Uzmimo na pr. za ravnalicu kružnicu prikazanu na slici 189, kojoj je jednadžba

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$z = 5$$

Uvrštenje $y = \sqrt{16 - x^2}$ i $z = 5$ u opće rješenje daje:

$$3x + 2\sqrt{16 - x^2} = f(5x - 10)$$

Stavimo

$$5x - 10 = t$$

Odatle

$$x = \frac{t + 10}{5}$$

a prema tome

$$3x + 2\sqrt{16 - x^2} = \frac{3}{5}(t + 10) + 2\sqrt{16 - \frac{(t + 10)^2}{25}}$$

a to je $$f(t) = f(5x - 10).$$

Nakon uvrštenja

$$\sqrt{16 - x^2} = y \quad \text{i} \quad t = 5x - 2z$$

i uređivanja dobivamo konačno partikularno rješenje:

$$\underline{25x^2 + 25y^2 + 13z^2 - 20xz + 30yz + 100x - 150y - 130z - 75 = 0}$$

Ono predočuje kosi valjak eliptičkog poprečnog presjeka, kojega ravnina $z = 5$, koja je paralelna s ravninom XY, siječe u zadanoj ravnalici, t. j. kružnici polumjera 4.

Navedimo još nekoliko primjera:

1. $$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

Odredi opće rješenje i partikularno uz početni uvjet $x = 2y = 3z$.

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}$$

Iz $$\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{z^2} \quad \text{i} \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}$$

dobijemo integrirajući

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{z} + C_1 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{y} = -\frac{1}{z} + C_2$$

Odatle

$$C_1 = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$$

$$\underline{\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)} \quad \text{.... opće rješenje}$$

Partikularno rješenje:

Iz uvjeta $$x = 2y = 3z$$
slijedi

$$y = \frac{x}{2} \; ; \; z = \frac{x}{3}$$

Uvrštenje u opće rješenje daje

$$\frac{2}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ili uz

$$\frac{1}{x} = t$$

$$f(t) = 2t$$

a kako je uz naše uvjete $t = \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$, imamo

$$f\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right) = 2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)$$

Uvrštenje u opće rješenje daje traženo partikularno rješenje

$$\underline{\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)}$$

ili

$$\underline{z = \frac{xy}{2x - y}}$$

2.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{xy}$$

Iz $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ slijedi

$$\ln x = \ln y + \ln C_1$$

ili

$$\ln x = \ln (C_1 y)$$

odatle

$$x = C_1 y \qquad \text{(a)}$$

pa

$$C_1 = \frac{x}{y} \qquad \text{(b)}$$

U $\frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{xy}$ uvrstimo (a):

$$\frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{C_1 y^2}$$

Odatle

$$C_1 \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + C_2$$

Uvrštenje (b) daje

$$\frac{xy}{2} = \frac{z^2}{2} + C_2$$

Odatle

$$C_2 = \frac{1}{2}(xy - z^2)$$

pa je

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2}(xy - z^2)$$

ili

$$z = \sqrt{xy - 2f\left(\frac{x}{y}\right)} \quad \text{.... opće rješenje}$$

3. Odredi silnice polja sila

$$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

Prema (221)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$$

Iz

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

slijedi

$$\ln y = \ln x + \ln C_1$$

$$y = C_1 x$$

Iz

$$\frac{dz}{2z} = \frac{dx}{x}$$

slijedi

$$\ln z = 2\ln x + \ln C_2$$

$$z = C_2 x^2$$

Riješi parcijalne diferencijalne jednadžbe:

$$3\frac{\partial z}{\partial x} + (x+2)\frac{\partial z}{\partial y} = 5z - 1$$

$$[F(x^2 + 4x - 6y\ ,\ 5x - 36\ \ln(5z - 1) = 0]$$

2.
$$2yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0$$

i odredi partikularno rješenje za ravnalicu

$$x^2 + y^2 - y = 0\ ,\ z = 0$$

$$[x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{y^2 - z^2} = 0]$$

3.
$$tg\, x\frac{\partial z}{\partial x} + tg\, y\frac{\partial z}{\partial y} = tg\, z$$

$$\left[F\left(\frac{\sin x}{\sin y}\ ,\ \frac{\sin x}{\sin z}\right) = 0\right]$$

POPIS NAJVAŽNIJIH FORMULA

Vektorska algebra

Radijvektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

apsolutna vrijednost ili duljina $r = |\vec{r}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (3)

smjer $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\cos\beta = \frac{y}{r}$; $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ (4)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (5)$$

skalarne komponente $r_x = x = r\cos\alpha$; $r_y = y = r\cos\beta$; $r_z = z = r\cos\gamma$ (6)

Za $r = 1$: $r_x = \cos\alpha$; $r_y = \cos\beta$; $r_z = \cos\gamma$ (7)

Opći vektor $\vec{d} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ (8)

Njegova duljina, odnosno udaljenost dviju točaka u prostoru:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (9)$$

Skalarni produkt $(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$ (11)

u komponentama $\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (18)

$\vec{a} \perp \vec{b}$, ako je $\vec{a}\,\vec{b} = 0$; $\vec{a}\,\vec{a} = \vec{a}^2 = a^2$ (15)

Osnovni jedinični vektori:

$$\vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{i} = 0; \quad \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{j} = 0; \quad \vec{k}\,\vec{i} = \vec{i}\,\vec{k} = 0 \quad (13)$$

$$\vec{i}\,\vec{i} = \vec{i}^2 = 1; \quad \vec{j}\,\vec{j} = \vec{j}^2 = 1; \quad \vec{k}\,\vec{k} = \vec{k}^2 = 1 \quad (16)$$

Kut dvaju vektora: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{a\,b}$ (19)

Zakoni: $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d}$ (17)

Vektorski produkt: $\vec{a} \times \vec{b}$

duljina: $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \varphi$ (20)

smjer: $\perp$ na ravnini $\vec{a}$ i $\vec{b}$

smisao: pravilo desne ruke, odnosno desnog vijka

u komponentama:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) \quad (27)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \text{ ako je } \vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad (23)$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \quad (24)$$

Osnovni jedinični vektori

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (21)$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0; \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0; \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad (25)$$

Zakoni: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d}$ (26)

Višestruki produkti

$$(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = ab \sin \varphi \cdot c \cos \psi = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = V \text{ paralelopipeda} \quad (31)$$

Uvjet komplanarnosti triju vektora: $(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = 0$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}); \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}) \quad (32)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a}[\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{a}\,\vec{c})(\vec{b}\,\vec{d}) - (\vec{a}\,\vec{d})(\vec{b}\,\vec{c}) \quad (33)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}[(\vec{a} \times \vec{b})\vec{d}] - \vec{d}[(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}] = \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) \quad (34)$$

Vektori ovisni o parametru t

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b}\frac{d\vec{a}}{dt} \qquad (35)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} - \vec{b} \times \frac{d\vec{a}}{dt}$$

Za $a = 1 = \text{const.}$ $\frac{d\vec{a}}{dt} \perp \vec{a}$

Analitička geometrija u prostoru

Pravac

Jednadžba pravca
kroz jednu točku (x_1, y_1, z_1):

u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + at \\ y &= y_1 + bt \\ z &= z_1 + ct \end{aligned} \quad \Bigg| \quad -\infty < t < +\infty \qquad (37)$$

u kanonskom obliku:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad (38)$$

kosinusi smjera pravca:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \; \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \; \cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (39)$$

Kroz dvije točke (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (41)$$

Dva pravca

kut dvaju pravaca:

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \qquad (42a)$$

uvjet okomitosti: $$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \qquad (43)$$

uvjet paralelnosti: $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad (44)$$

uvjet, da se dva pravca sijeku: $$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (44a)$$

Ravnina

Jednadžba ravnine:

u općem obliku: $$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (46)$$

u normalnom obliku: $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0 \qquad (45)$$

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (47a)$$

u segmentnom obliku: $$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{q} = 1 \qquad (49)$$

u parametarskom obliku: $$\begin{aligned} x &= x_1 + ua_1 + va_2 \\ y &= y_1 + ub_1 + vb_2 \\ z &= z_1 + uc_1 + vc_2 \end{aligned} \qquad (52a)$$

kroz jednu zadanu točku: $$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + (z - z_1) = 0 \qquad (50a)$$

kroz tri zadane točke: $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (51)$$

udaljenost točke (x_1, y_1, z_1) od ravnine: $$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (48)$$

Dvije ravnine

kut dviju ravnina: $$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (53a)$$

uvjet okomitosti: $$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \qquad (54)$$

uvjet paralelnosti: $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (55)$$

Pravac i ravnina

kut pravca i ravnine: $$\sin\varphi = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (56a)$$

uvjet paralelnosti: $$aA + bB + cC = 0 \qquad (57)$$

uvjet okomitosti: $$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \qquad (58)$$

uvjeti, da pravac leži u ravnini:

$$aA + bB + cC = 0$$
$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (59)$$

Plohe drugog reda

kugla: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; (60) troosni elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (63)

Troosni hiperboloid:

dvokrilni: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; (64) jednokrilni: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (65)

Paraboloid:

eliptični: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$; (69) hiperbolni: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ (70)

Eliptički stožac: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Jednadžba tangentne ravnine i normale u točki (x_1, y_1, z_1)

plohe $F(x, y, z) = 0$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 (x - x_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1 (z - z_1) = 0 \qquad (76)$$

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_1} \qquad (78)$$

plohe $z = f(x, y)$:

$$(x - x_1)p_1 + (y - y_1)q_1 = z - z_1 \qquad (75)$$

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{-1} \qquad (77)$$

gdje je $p_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1$; $q_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_1$

Parcijalne derivacije i diferencijali

Za eksplicitnu funkciju $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad (79)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (80)$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \tag{82}$$

Za složenu funkciju $w = f(u, v)$, gdje je $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \quad \text{Slično} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \text{ i } \frac{\partial w}{\partial z} \tag{88}$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv \tag{85}$$

$$d^2w = \left(\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}d^2u + \frac{\partial w}{\partial v}d^2v =$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u}d^2u + \frac{\partial w}{\partial v}d^2v \tag{86}$$

Za implicitnu funkciju:

$f(x, y) = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \tag{90}$$

$F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \tag{92}$$

Taylor-ov red za funkciju $z = f(x, y)$ iz točke (x_0, y_0):

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 +\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \cdots \tag{96}$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)\right]^2_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)\right]^3_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \cdots \tag{96b}$$

gdje su potencije izraza u uglatim zagradama simbolične.

Mac Laurin-ov red za funkciju $z = f(x, y)$:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xy + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} x^2 y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} x y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y^3\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \dots \quad \text{(97a)}$$

Ekstremne vrijednosti funkcije $z = f(x, y)$

A) Slobodni ekstrem.

Nužni uvjet: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (100)

Dovoljni uvjet:

Oznaka: u točki (x_0, y_0)

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = r_0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0 = s_0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 = t_0$$

I. $r_0 \neq 0$

a) $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$

ekstrem u točki (x_0, y_0) i to

za $r_0 < 0$ maksimum, a za $r_0 > 0$ minimum

b) $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ ekstrema nema (101)

c) $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ neodlučno

II. $r_0 = 0$

a) $s_0 \neq 0$ ekstrema nema

b) $s_0 = 0$ neodlučno.

B) Vezani ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ svodi se na slobodni ekstrem funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y) \quad \text{(102)}$$

Singularne točke krivulje $F(x, y) = 0$

Određuju se iz sustava jednadžbi:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{(103)}$$

ako je $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ dvostruka točka

$r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ izolirana točka (104)

$r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ šiljak

Tu je: $r_0 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0$; $s_0 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0$; $t_0 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0$

Ovojnica (anvelopa) familije krivulja $F(x, y, \alpha) = 0$

Njena jednadžba se dobije tako, da se ukloni parametar α iz jednadžbi:

$$\frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad ; \quad F(x, y, \alpha) = 0 \tag{105}$$

Višestruki integrali

Dvostruki integrali

u pravokutnim koordinatama:

$$V = \iint_\sigma f(x, y)dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \tag{106}$$

u polarnim koordinatama: $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$

$$V = \iint_\sigma f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi \tag{111}$$

u eliptičkim koordinatama: $x = au \cos v$; $y = bu \sin v$; $dx\,dy = ab\,u\,du\,dv$

$$0 \leq u \leq 1$$
$$0 \leq v < 2\pi$$

$$V = ab \iint_\sigma f(au \cos v, bu \sin v)u\,du\,dv \tag{113}$$

Trostruki integrali

u pravokutnim koordinatama:

$$\iiint_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz \tag{109}$$

u cilindričkim koordinatama: $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $z = z$

$$0 \leqq \varphi < 2\pi; \quad 0 \leqq \rho < +\infty; \quad -\infty < z < +\infty$$

$$dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \tag{115}$$

$$\iiint_V f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \tag{116}$$

u prostornim polarnim (kuglinim) koordinatama:

$$\left.\begin{aligned} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = \rho \cos \vartheta \\ 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi; \quad 0 \leq \rho < +\infty \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

$$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin \vartheta\,d\vartheta\,d\rho\,d\varphi \tag{118}$$

$$\iiint_V f(\rho \sin \vartheta \cos \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \vartheta)\rho^2 \sin \vartheta\,d\vartheta\,d\rho\,d\varphi \tag{119}$$

opći slučaj: $x = x(u, v, t)$; $y = y(u, v, t)$; $z = z(u, v, t)$

$$dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)}\right| du\,dv\,dt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} du\,dv\,dt \tag{120a}$$

Primjena višestrukih integrala

Nehomogeni ravni likovi gustoće $\mu = \mu(x, y)$:

masa
$$m = \iint_S \mu(x, y)\,dx\,dy \tag{123b}$$

težište za $\mu = 1$
$$\left.\begin{aligned} x_t = \frac{M_y}{S} = \frac{\iint_S x\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy} \\ y_t = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint_S y\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy} \end{aligned}\right| \tag{125}$$

Momenti tromosti (inercije) ravnih likova ($\mu = 1$):

$$I_x = \iint_S y^2\,dx\,dy \quad ; \quad I_y = \iint_S x^2\,dx\,dy \quad ; \quad I_{xy} = \iint_S xy\,dx\,dy \tag{126}$$

$$I_p = I_0 = \iint_S \rho^2\,dx\,dy \tag{127}$$

Komplanacija plohe $z = f(x, y)$:

$$S = \iint_\sigma \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy = \iint_\sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \tag{131}$$

Masa nehomogene plohe $z = f(x, y)$ gustoće $\mu = \mu(x, y)$:

$$m = \iint_\sigma \mu(x, y)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy \tag{132a}$$

Nehomogena tijelesa gustoće $\mu = \mu(x, y, z)$ i volumena V:

masa

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{136}$$

težište

$$x_t = \frac{\iiint_V x\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{m}, \quad y_t = \frac{\iiint_V y\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{m}, \quad z_t = \frac{\iiint_V z\,\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{m} \tag{137}$$

momenti tromosti (inercije)

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dx\,dy\,dz \\ I_y &= \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ I_z &= \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right| \tag{138}$$

$$I_p = I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \tag{139}$$

Integrali, koji ovise o parametru

Deriviranje po parametru α:

1. Granice integracije su konstantne

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,dx \tag{144}$$

2. Granice integracije su funkcije parametra α

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,dx + f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} \tag{145}$$

Integriranje po parametru α:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\int_a^b f(x, \alpha)dx\right]d\alpha = \int_a^b dx\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)\,d\alpha \tag{146}$$

Egzaktni diferencijali. Egzaktne diferencijalne jednadžbe

Ako je
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{147}$$

$$\begin{aligned} \int P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int dU(x, y) + C = U(x, y) + C = \\ &= \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C \end{aligned} \tag{148}$$

Ako je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ i $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, (149)

$$\int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int dU(x, y, z) + C =$$

$$= U(x, y, z) + C = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dz +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz + C \qquad (150)$$

Euler-ov multiplikator μ za slučaj, kad je $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$:

1. Ako je $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \qquad (152)$$

2. Ako je $\mu = \mu(y)$:

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \qquad (152a)$$

Krivulje u prostoru

I. krivulja $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (154) na pr. cilindrička spirala $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = ct$ (155)

Jednadžbe u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ parametra $t = t_0$:

tangente

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \qquad (156)$$

ili

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz} \qquad (156a)$$

normalne ravnine $(x - x_0)x'(t_0) + (y - y_0)y'(t_0) + (z - z_0)z'(t_0) = 0$ (157)

oskulacione ravnine

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (163)$$

duljina luka (rektifikacija)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (161)$$

II. krivulja $x = x(s)$
$y = y(s)$ gdje je s duljina luka krivulje.
$z = z(s)$

Jednadžba u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ parametra $s = s_0$:

tangente
$$\frac{x - x_0}{x'(s_0)} = \frac{y - y_0}{y'(s_0)} = \frac{z - z_0}{z'(s_0)} \qquad (169)$$

normalne ravnine
$$(x - x_0)x'(s_0) + (y - y_0)y'(s_0) + (z - z_0)z'(s_0) = 0 \qquad (170)$$

oskulacione ravnine
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (171)$$

binormale

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y'(s_0) & z'(s_0) \\ y''(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z'(s_0) & x'(s_0) \\ z''(s_0) & x''(s_0) \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x'(s_0) & y'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) \end{vmatrix}} \qquad (172)$$

glavne normale
$$\frac{x - x_0}{x''(s_0)} = \frac{y - y_0}{y''(s_0)} = \frac{z - z_0}{z''(s_0)} \qquad (173)$$

rektifikacione ravnine

$$(x - x_0)x''(s_0) + (y - y_0)y''(s_0) + (z - z_0)z''(s_0) = 0 \qquad (174)$$

zakrivljenost
$$K = \frac{1}{\rho} = \sqrt{x''^2(s_0) + y''^2(s_0) + z''^2(s_0)} \qquad (164b)$$

torzija
$$\tau = \frac{1}{\rho_1} = -\frac{\begin{vmatrix} x'(s_0) & y'(s_0) & z'(s_0) \\ x''(s_0) & y''(s_0) & z''(s_0) \\ x'''(s_0) & y'''(s_0) & z'''(s_0) \end{vmatrix}}{x''^2(s_0) + y''^2(s_0) + z''^2(s_0)} \qquad (177)$$

III. krivulja $\vec{r} = \vec{r}\,(s)$

Frenet-ove formule

$\vec{t}_0$ — ort tangente ; $\vec{n}_0$ — ort glavne normale;

$\vec{b}_0$ — ort binormale

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{t}_0}{ds} &= \frac{\vec{n}_0}{\rho} = K\vec{n}_0 \\ \frac{d\vec{b}_0}{ds} &= -\frac{\vec{n}_0}{\rho_1} = -\tau\vec{n}_0 \\ \frac{d\vec{n}_0}{ds} &= -\frac{\vec{t}_0}{\rho} + \frac{\vec{b}_0}{\rho_1} = -K\vec{t}_0 + \tau\vec{b}_0 \end{aligned}\right| \qquad (178)$$

Veza između integrala različitih tipova

Green-ova formula

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad (193)$$

Stokes-ova formula

$$\oint_K P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos\gamma\right] dS = \qquad (194)$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\, dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Gauss-ova formula

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_S [P(x, y, z) \cos\alpha + Q(x, y, z) \cos\beta +$$

$$+ R(x, y, z) \cos\gamma]\, dS = \qquad (196)$$

$$= \iint_S P(x, y, z)dy\, dz + Q(x, y, z)dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy$$

Vektorska analiza

Derivacija funkcije $U(x, y, z)$ u smjeru $s(\alpha, \beta, \gamma)$, odnosno $\vec{s}_0$

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos\gamma = \frac{\partial U}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0\, \mathrm{grad}\, U \qquad (198)$$

$$\mathrm{grad}\, U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad (199)$$

Kut dviju ploha $G(x, y, z) = 0$ i $H(x, y, z) = 0$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial H}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2}} \quad (200)$$

Za vektorsko polje $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$

$$div\, \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (202)$$

$$rot\, \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (204)$$

$$U(x, y, z) = \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz + C =$$

$=$ potencijal polja $\vec{v}$, ako je $v_x = P = \frac{\partial U}{\partial x}$; $v_y = Q = \frac{\partial U}{\partial y}$; $v_z = R = \frac{\partial U}{\partial z}$

odnosno ako je $rot\, \vec{v} = 0$

Gauss-ova formula u vektorskom obliku

$$\iiint_V div\, \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iint_S v_n dS \quad (203)$$

Stokes-ova formula u vektorskom obliku

$$\oint_K v_t\, ds = \iint_S (rot\, \vec{v})_n\, dS \quad (205)$$

Operatori:

I Nabla $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad (206)$$

$$\nabla \text{ skalar} = grad \text{ skalara} = \nabla U = grad\, U \quad (207)$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V = grad\, U + grad\, V \\ &\nabla(UV) = U\nabla V + V\nabla U = U grad\, V + V grad\, U \\ &\nabla kU = k\nabla U = k\, grad\, U \\ &\nabla f(U) = f'(U) \cdot \nabla U = f'(U)\, grad\, U \end{aligned}\right| \quad (208)$$

$$\nabla \text{ vektor} = div \text{ vektora} = \nabla \vec{v} = div\,\vec{v} \qquad (209)$$

$$\nabla (k\vec{v}) = k\,\nabla \vec{v} = k\,div\,\vec{v}$$

gdje je k konstanta

$$\nabla(\vec{v}+\vec{t}) = \nabla\vec{v} + \nabla\vec{t} = div\,\vec{v} + div\,\vec{t} \qquad (210)$$

$$\nabla(U\vec{v}) = U\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla U = U\,div\,\vec{v} + \vec{v}\,grad\,U$$

$$\nabla(\vec{c}\,U) = div\,(\vec{c}\,U) = \vec{c}\,grad\,U = \vec{c}\,\nabla U$$

gdje je $\vec{c}$ konstantan vektor (210b)

$$\nabla \times \text{vektor} = rot \text{ vektora} = \nabla \times \vec{v} = rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad (211)$$

$$rot\,(U\vec{v}) = \nabla \times (U\vec{v}) = U(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \times \nabla U =$$

$$= U\,rot\,\vec{v} - \vec{v} \times grad\,U \qquad (212)$$

$$rot\,(\vec{v}+\vec{t}) = \nabla \times (\vec{v}+\vec{t}) = \nabla \times \vec{v} + \nabla \times \vec{t} = rot\,\vec{v} + rot\,\vec{t} \qquad (213)$$

$$div\,\vec{r} = 3 \qquad (210a)$$

$$rot\,\vec{r} = 0 \qquad (213a)$$

gdje je $\vec{r} =$ radijvektor $= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$rot\,(\vec{c}\,U) = \nabla \times (\vec{c}\,U) = -\vec{c} \times \nabla U = -\vec{c} \times grad\,U$$

gdje je $\vec{c}$ konstantan vektor (213b)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0(\nabla \vec{v}) = (\vec{s}_0 \nabla v_x)\vec{i} + (\vec{s}_0 \nabla v_y)\vec{j} + (\vec{s}_0 \nabla v_z)\vec{k} \qquad (213\text{ c})'$$

$$(\vec{v}\nabla)\vec{t} = v\frac{\partial \vec{t}}{\partial \vec{v}_0} \qquad (213d)$$

$$(\vec{s}_0 \nabla)U = \frac{\partial U}{\partial \vec{s}_0} = \vec{s}_0\,grad\,U \qquad (213d)'$$

$$(\vec{s}\,\nabla)U = \vec{s}\,grad\,U$$

$$\text{grad}\,(\vec{v}\,\vec{t}) = \nabla(\vec{v}\,\vec{t}) =$$

$$= \vec{v}\times(\nabla\times\vec{t}) + \vec{t}\times(\nabla\times\vec{v}) + (\vec{v}\nabla)\,\vec{t} + (\vec{t}\nabla)\,\vec{v} = \tag{213e}$$

$$= \vec{v}\times \text{rot}\,\vec{t} + \vec{t}\times \text{rot}\,\vec{v} + v\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial\vec{v}_0} + t\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{t}_0}$$

$$div\,(\vec{v}\times\vec{t}) = \nabla(\vec{v}\times\vec{t}) = \vec{t}(\nabla\times\vec{v}) - \vec{v}(\nabla\times\vec{t}) =$$

$$= \vec{t}\,\text{rot}\,\vec{v} - \vec{v}\,\text{rot}\,\vec{t} \tag{213f}$$

$$\text{rot}\,(\vec{v}\times\vec{t}) = \nabla\times(\vec{v}\times\vec{t}) =$$

$$= \vec{v}\,(\nabla\,\vec{t}) - \vec{t}\,(\nabla\,\vec{v}) + (\vec{t}\,\nabla)\,\vec{v} - (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{t} = \tag{213g}$$

$$= \vec{v}\,div\,\vec{t} - \vec{t}\,div\,\vec{v} + t\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{t}_0} - v\,\frac{\partial\vec{t}}{\partial\vec{v}_0}$$

$$\nabla\,grad\,U = div\,grad\,U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{214}$$

II Delta $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{215}$$

$$div\,grad\,U = \nabla\,grad\,U = \nabla\nabla\,U = \Delta\,U$$

$$\nabla\nabla = \nabla^2 = \Delta = div\,grad \tag{216}$$

$$\nabla\times\nabla = 0 \tag{217}$$

$$\Delta\,U = \Delta\ \text{skalar} = \text{skalar} = div\,grad\ \text{skalara} = div\,grad\,U$$

$$\Delta\ \text{vektor} = \Delta\,\vec{v} = div\,grad\,\vec{v} = \Delta P\,\vec{i} + \Delta Q\,\vec{j} + \Delta R\,\vec{k}$$

gdje je

$$\vec{v} = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k} \tag{218}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta(U+V) &= \Delta U + \Delta V\\ \Delta(UV) &= U\Delta V + 2\nabla U\nabla V + V\Delta U\end{aligned}\right| \tag{218a}$$

$$div\,rot\,\vec{v} = \nabla(\nabla\times\vec{v}) = (\nabla\times\nabla)\,\vec{v} = 0$$

$$rot\,grad\,U = \nabla\times(\nabla U) = (\nabla\times\nabla)\,U = 0$$

$$rot\, rot\, \vec{v} = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = grad\, div\, \vec{v} - div\, grad\, \vec{v} = \nabla(\nabla \vec{v}) - \Delta \vec{v} \tag{220}$$

$$grad\, div\, \vec{v} = \nabla(\nabla \vec{v}) = rot\, rot\, \vec{v} + div\, grad\, \vec{v} = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \Delta \vec{v} \tag{219}$$

$$\Delta f(U) = f'(U)\Delta U + f''(U)\, (\nabla U)^2 \tag{220a}$$

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f_r') \tag{220b}$$

$$\Delta \{\Delta f(r)\} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} \right) \tag{220c}$$

Tu je $r = |\vec{r}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Opći oblik linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

Diferencijalna jednadžba karakterističnih krivulja

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{221}$$

Opće rješenje: $\quad F(C_1, C_2) = 0 \quad$ ili $\quad C_1 = f(C_2)$ (222)

gdje su F i f funkcije po volji, a

$$C_1 = u(x, y, z); \quad C_2 = v(x, y, z)$$

konstante integracije izračunate iz općih rješenja diferencijalnih jednadžbi karakterističnih krivulja.

Znak: 257 Sv

Izdanje:
Prof. dr ing. BORIS APSEN
REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE
III dio

Izdavač:
TEHNIČKA KNJIGA
Izdavačko poduzeće
ZAGREB, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara:
Ing. KUZMAN RAŽNJEVIĆ

Uredništvo sveučilišnih udžbenika
Glavni urednik:
ZVONIMIR VISTRIČKA

Urednik edicije:
IVAN UREMOVIĆ

Tehnički urednik:
ŽARKO PAVUNIĆ

Korigirao:
AUTOR

Tisak:
TEHNIČKA KNJIGA
Zagreb

Tisak dovršen:
SRPANJ 1965.